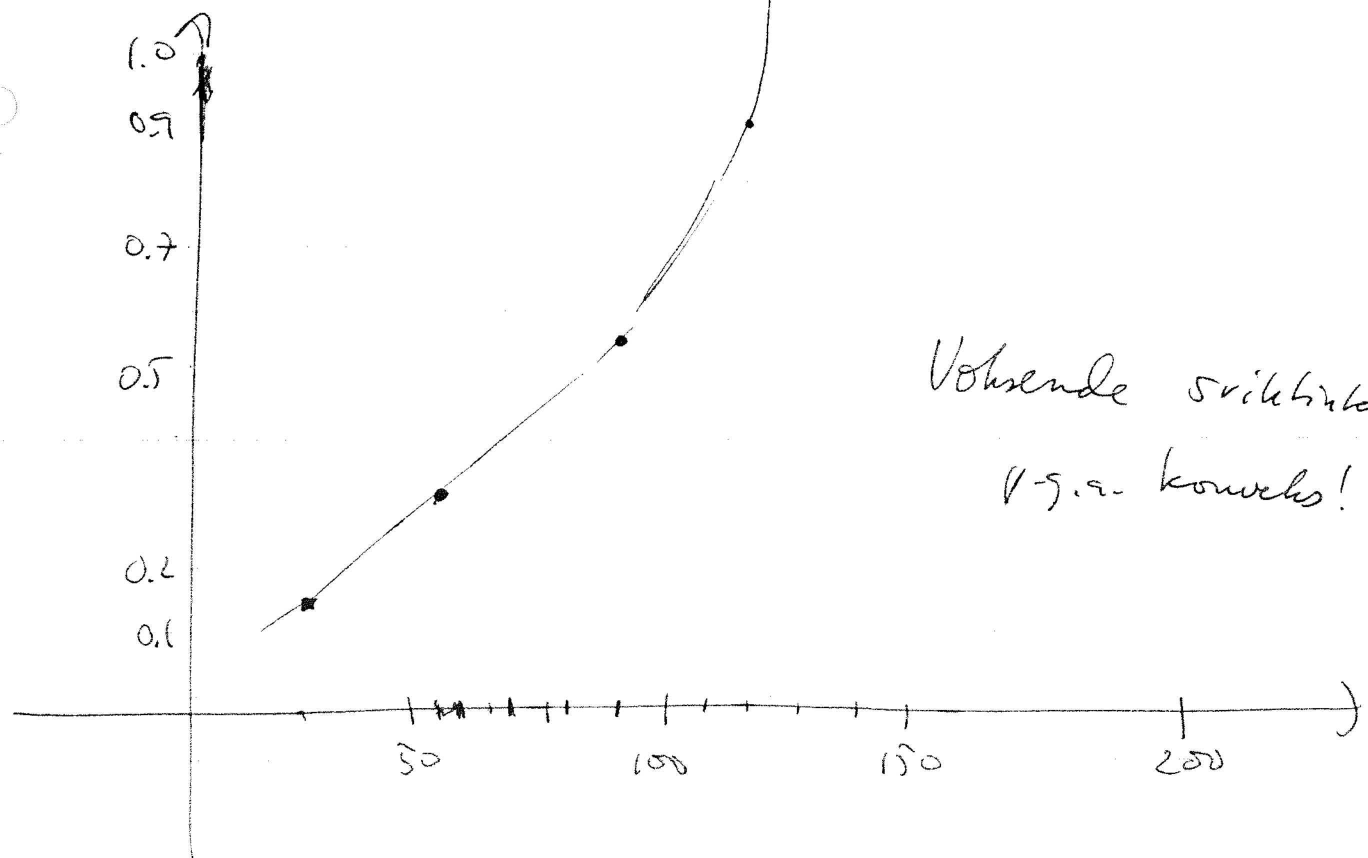
-1- LØSN LEVETIDSANALYSE
Mai 2002

Oppgave 1

a)

Rang j	Levetid $t_{(j)}$		Invers antall ved risiko	Nelson	
1	27	$\cancel{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0.1429
2	54	$\cancel{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}$	0.3095
3	87*				
4	90		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$	0.5595
5	114		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$	0.8929
6	127		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$	1.392
7	198*				



Voksende sviktintensitet p.g.a. konveks!

b) exp(λ)!

Rimelighet

$$\prod_{\substack{\text{obs.}\\ \text{feiltide}}} \lambda e^{-\lambda t_i} \cdot \prod_{\substack{\text{sens.}\\ \text{feiltide}}} e^{-\lambda t_i}$$

$$= \lambda^5 \cdot e^{-\lambda(27+54+87+90+114+127+198)}$$

$$\circledast \quad = \lambda^5 e^{-\lambda \cdot 697}$$

Antagelse: Uavh. levetider
Uavh. sensurering

Sensurerte bidrar med "$P(T > t_{\text{obs.sens.tid}})$"

c) SME: λ som maksimerer ⊛

Det er $\lambda = \dfrac{5}{697} = \underline{0.0072}$

$$\widehat{P(T > 200)} = e^{-200 \cdot \frac{5}{697}} = \underline{\underline{0.2382}}$$

Teste

d) $H_0 : \alpha = 1$ mot $H_1 : \alpha \neq 1$.

Likelihood ratio test:

Testobservator

$W = 2($ log likelihood i Weibull $-$ loglikelihood $_{\text{exp}})$

$\sim \chi^2_1$ hvis H_0 gjelder.

$\approx 2 \cdot (-28.90 -$

Loglikelih. i modell:

$5 \log \lambda - 697 \lambda$

$= 5 \cdot \log (5/697) - 5$

$= -29.69$

$\Rightarrow W = 2 \cdot (29.69 - 28.90) = 1.58$

Ser at $\chi^2_{1, 0.05 \text{ øvre}} = 3.84$

dvs. Forkaster ikke, på nivå 5%.

Oppgave 2

$$f(t) = te^{-t}$$

$$\underline{\underline{R(t)}} = \int_t^\infty ue^{-u}\,du = \underline{\underline{(t+1)e^{-t}}}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \underline{\underline{\frac{t}{t+1}}}$$

$\cancel{R(t) = \bar{F}(t}$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)\,dt = \int_0^\infty (t+1)e^{-t}\,dt \underline{\underline{= 2}}$$

b) $N(t)$ er da en fornyelsesprosess.

$$W(20) = ?$$

Vet at $\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$

dvs $W(t) \approx \frac{t}{\mu}$ når t er stor

Her: $\underline{\underline{W(20) \approx \frac{20}{2} = 10}}$

dvs. forventes ≈ 10 feil i løpet av tid 20.

c) Poisson-prosess fordi feiltiden etter en feil er uavh. av fortiden ...

Forv. ant. feil i (0,20] er

$$\int_0^{20} \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^{20}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 20 - \int_0^{20} \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= 20 - \Big|_0^{20} \ln(1+t)$$

$$= 20 - \ln 21 = \cancel{17.0}\ \underline{16.96}$$

(Man altså forvente ≈ 17 feil i dette tilfellet).

a) λ = ant. feil pr. tidsenhet. , $\Lambda \sim$ gamma(α, β)

$$\pi(\lambda \mid x) \propto f(x/\lambda)\, \pi(\lambda)$$

$$= \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \cdot \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\lambda}$$

$$\propto \lambda^{\alpha+x-1} e^{-(\beta+t)\lambda}$$

Men dette er $\underline{\text{gamma}\,(\alpha+x, \beta+t)}$

b) $\hat{\lambda}_{Bayes}$ = forventn i aposteriorifordel

$$= \frac{\alpha+X}{\beta+t}$$

Fortolkn: Apriori (α, β) svarer til APOSTERIORI ved $x = \alpha$, $t = \beta$ hvis vi "starter med null informasjon".

Altså: "APRIORI (α, β)" er ekvivalent med å tro at $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, ~~og~~ med en sikkerhet som svarer til at dette er basert på β års erfaring . . .

c) $\hat{\lambda}_{Bayes} = \frac{4+11}{20+56} = \frac{15}{76} = \underline{\underline{0.1974}}$ (pr. år)

SME: $\hat{\lambda}_{SME} = \frac{X}{t} = \frac{11}{56} = \underline{\underline{0.1964}}$ (pr. år).

Meget like!

Credibilitetsintervall

Velg grenser c_L, c_u slik at

$$P(c_L < \Lambda < c_u \mid X = x) = 0.90$$

$$\Updownarrow$$

$$P(2(\beta+t)c_L < Z < 2(\beta+t)c_u) = 0.90$$

$$Z \sim \chi^2_{2(4+11)} = \chi^2_{30}$$

Dermed er $P(18.49 < Z < 43.77) = 0.90$

dvs
$$2(20+56) \cdot c_L = 18.49$$
$$2(20+56) \cdot c_u = 43.77$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{c_L = 0.1216}}$, $\underline{\underline{c_u = 0.2880}}$