LEVETID Mai 2003

a) Type I sensurering

Estimeres $R(t) = P(T > t)$

Forutsetn:

Uavh og ident. fordelte levetider, generell fordeling, m/ uavhengig sensurering.

Oppfylt her, siden sensurering er et fast tidspunkt

$P(T \leq 400) = \cancel{1} \cancel{2} 1 - 0.9 + \frac{12}{30} \cdot 0.1$

$= 1 - 0.94 = 0.06$

$t_{0.10} = 560$

Median $t_{0.50}$ kan ikke estimeres, da fordelingen kan være helt vilkårlig

b) $\theta = MTTF$

$L(\theta) =$ "P(få det vi har fått ; θ)

Vi observerer $Y = \min(T, t_0)$

Denne har fordeling

$f(y;\theta)$ for $0 < y < t_0$

Punktmasse $R(t_0;\theta)$ for $y = t_0$

Likelihooden blir da

$$L(\theta) \prod_{i=1}^{20} f(t_i;\theta) \cdot R(t_0;\theta)^{80}$$

dvs $L(\theta) = \frac{1}{\theta^{20}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{\theta}} \cdot \left(e^{-\frac{t_0}{\theta}}\right)^{80}$

$$= \frac{1}{\theta^{20}} e^{\frac{-\left(\sum_{i=1}^{20} t_i + 80 t_0\right)}{\theta}}$$

$$l(\theta) = -20 \log \theta - \frac{1}{\theta} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{20} t_i + 80 t_0\right)}_{S}$$

c) $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{20}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} S$

Settes dette lik 0 får $\underline{\hat{\theta} = \frac{S}{20}}$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{20}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} S$$

Tilstrekkelig: $S = \sum t_i + 80 t_0$, samt R.

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{Var}\,\hat{\theta}} = \left(\frac{1}{\frac{2}{\theta^3} S - \frac{20}{\theta^2}}\right)\Bigg|_{\theta = \hat{\theta}} = \underline{\frac{\hat{\theta}^2}{20}}$

$$\hat{\theta} = \frac{80\,000 + 9816}{20} = 4490.8$$

$$\widehat{SD\hat{\theta}} = \frac{4490.8}{\sqrt{20}} = 1004.2$$

Standard int: $\hat{\theta} \pm 1.96\ \widehat{SD\hat{\theta}}$

$$4490.8 \pm 1968.2$$

dvs $(2522.6,\ 6459.0)$

d) t_p : $P(T \le t_p) = p$

$$1 - e^{-\frac{t_p}{\theta}} = p$$

$$e^{-\frac{t_p}{\theta}} = 1 - p$$

$$t_p = -\ln(1-p) \cdot \theta$$

$\cancel{t_{0.10}}$ $\Rightarrow$ $\hat{t}_p = -\ln(1-p) \cdot \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \hat{t}_{0.10} = -\ln 0.90 \cdot 4490.8 = \underline{473.2}$$

$H_0: t_{0.10} = 700$ mot $H_1: t_{0.10} \neq 700$

Dette er ekvivalent med

$H_0: \theta = \dfrac{700}{-\ln 0.90}$ mot $H_1: \neq$

dvs $H_0: \theta = 6643.9$ mot $H_1: \theta \neq 6643.9$

Test 1: Dette er utenfor 95% konf.int, så vi skal forkaste (Testen er ikke likelihood-test).

Test 2: Likelihood-test:

Bruk at $W(\theta_0) = 2\left(l(\hat{\theta}) - l(\theta_0)\right) \approx \chi^2_1$.

Vi har $\theta_0 = 6643.9$

Når er $l(\theta) = -20 \log\theta - \dfrac{S}{\theta}$

dvs $l(\theta_0) = -189.5477$

mens $l(\hat{\theta}) = -20 \log(4490.8) - 20$

$= -188.1957$

Dermed $W(\theta_0) = 2(189.5477 - 188.1957)$

$= 2.7040$

Vi forkaster H_0 ~~ved~~ med 5% nivå hvis $W(\theta_0) \geq 3.84$.

Her vil vi dermed ikke forkaste.

e) $R \sim \text{bin}(n, P(T \leq t_0))$

dvs $\text{bin}(100,\ 1 - e^{-\frac{t_0}{\theta}})$

Dermed $E(R) = 100(1 - e^{-\frac{t_0}{\theta}})$

Estimator:

$$R = 100(1 - e^{-\frac{t_0}{\tilde{\theta}}})$$

$$1 - \frac{R}{100} = e^{-\frac{t_0}{\tilde{\theta}}}$$

$$\log\left(1 - \frac{R}{100}\right) = -\frac{t_0}{\tilde{\theta}}$$

$$\tilde{\theta} = -\frac{t_0}{\log\left(1 - \frac{R}{100}\right)}$$

Oppgave 2

a) Tabell ($Y(t)$ = antall prosesser ved tid t)

t	$Y(t)$	$1/Y(t)$	$(1/Y(t))^2$	$\hat{W}(t)$	$\widehat{\mathrm{Var}}\,\hat{W}(t)$	$\widehat{SD}(t)$
61	4	1/4	1/16	0.25	0.06	0.25
206	4	1/4	1/16	0.50	0.13	0.35
348	4	1/4	1/16	0.75	0.19	0.43
408	3	1/3	1/9	1.08	0.30	0.55
604	2	1/2	1/4	1.58	0.55	0.74

Estimer $W(t)$. Plotte $(t, \hat{W}(t))$ for $t = 61, 206, \dots, 604$

~~Beregn~~

$\hat{W}(360) \approx \cancel{0.82}\ \hat{W}(348) = 0.75$. ~~Konf.int.~~

b) Se tabell for $\widehat{SD}$. Plott $(t, \hat{W}(t) \pm 1.96 \cdot \widehat{SD}(t))$ (trunker i 0 hvis negative)

~~$\widehat{SD}(360) \approx \widehat{SD}(348) = 0.43$~~

~~Konf.int $(0, 0.75 + 2 \cdot 0.43) = (0, 1.61)$~~

c) Ser ut som en liten økning i $w(t)$ med tiden ..

$$H_0: w(t) \equiv \lambda \text{ (konstant) mot}$$

$$H_1: w(t) \text{ voksende.}$$

skal testes.

For ett system ~~kan vi bruke~~ kan vi bruke Laplace-test eller Military Handbook test.

Siden ant. prosesser her er > 1, og endepunktene er ulike, må vi før vi bruke Laplace / Mil Hbk test transformere prosessen ~~til~~ som følger:

1. Se på den projiserte prosess (alle feil inn på én akse). Må modifisere for å få en HPP under H_0:

2. Alle tider mellom feil
gangas opp med 4 i (0, 389],
med 3 i (389, 485]
med 2 i (485, 606]
med 1 i (606, 648].

Under H_0 : HPP vil dette ha
samme fordeling som én HPP-prosess.

Kan så bruke Laplace eller Military
Handbook test på dette.

Oppgave 3.

a) Hensikt: Høy pålitelighet $\Rightarrow$ få feil i testfasen ved ~~var~~ ~~[illegible]~~ normalforhold. Vil ~~akselerere~~ øke stresset for å få flere feil — og så ekstrapolere til bake til normalstress. (Trengs gode modeller!)

Modell 1: Stress s medfører at hasardraten forstørres med faktor $g(s)$.

Modell 2: Stress s medfører at (leve)tiden akselereres med faktor $\varphi(s)$.

b) $\cancel{R_0(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\alpha}}$

1) Vet at $R_s^{PH}(t) = e^{-\int_0^t z_s^{PH}(u)\,du} = e^{-g(s)Z_0(t)} = R_0^{g(s)}$

2) $Z_s^{AL}(t) = -\log R_s^{AL(t)} = -\log R_0(\varphi(s)t)$

$\Rightarrow z_s^{AL}(t) = Z_s'^{AL}(t) = \dfrac{\varphi(s)\, r_0(\varphi(s)t)}{R_0(\varphi(s)t)} = \underline{\varphi(s)\, z_0(\varphi(s)t)}$

c) $R_0(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\alpha}$

Modell 1:

Weibull $\Rightarrow$ $z_0(t) = \alpha \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\theta}$

Dermed

$$z_s^{PH}(t) = \alpha \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\theta}\, g(s)$$

$$= \alpha \left(\frac{t}{\theta g(s)^{-\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\theta g(s)^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

dvs under stress s: Weibull$(\alpha, \theta g(s)^{-\frac{1}{\alpha}})$

Modell 2:

$$R_s^{AL}(t) = R_0(\varphi(s)t)$$

$$= e^{-\left(\frac{\varphi(s)t}{\theta}\right)^\alpha}$$

$$= e^{-\left(\frac{t}{\theta\varphi(s)^{-1}}\right)^\alpha}$$

dvs. Weibull$(\alpha, \theta\varphi(s)^{-1})$

Modell 1 og 2 er ekvivalente siden vi under stress s får samme modell ved å sette $\varphi(s) = g(s)^{\frac{1}{\alpha}}$.