Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Per Hokstad
Tlf.: (735)92754,
90584132

EKSAMEN I FAG SIF5075 LEVETIDSANALYSE

Tirsdag 8. august 2000
Tid: kl 0900 - 1400

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator,
Statistiske tabeller (Tapir).

Oppgave 1.

En har registrert levetider (i dager) for en pumpe av type A:

190, 340, 470, 540*, 610, 700.

Observasjon nr. 4 som er merket med stjerne er sensurert.

Finn Kaplan-Meier estimatoren for overlevelsesfunksjonen til disse dataene.

Oppgave 2.

En setter n komponenter i funksjon ved tid 0, og levetidene til disse komponentene, $T_1, T_2, \ldots, T_n$ antas uavhengige og identisk fordelte. Alle observasjonene vil kunne sensureres.

a) Formulér en sensureringsmodell for forsøket, og sett opp rimelighetsfunksjonen (*likelihood function*).

b) Anta at observasjonene er Weibull-fordelte(α, λ), dvs overlevelsesfunksjonen er gitt som

$$R(t) = \exp(-(\lambda \cdot t)^{\alpha})$$

I det følgende skal α antas kjent og settes lik $\alpha_0 = 3$. Utled og beregn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ, når du bruker samme data som gitt i Oppgave 1.

c) Hvordan vil du nå estimere sannsynligheten for at en komponent av denne typen overlever 600 dager? Sammenlign med svaret som fås fra resultatet i Oppgave 1.

d) Finn egenskapene til SME for λ, og bruk dette til å finne et tilnærmet 90% konfidensintervall for λ.

e) Gjennomfør sannsynlighetskvotetesten for H_0: $\lambda = 0.002$.

Oppgave 3.

a) Definer de parametriske levetidsmodellene som akselererer tiden ved bruk av kovariater ("stressorer"). Se spesielt på overlevelsesfunksjonen og vis hvordan forventet levetid (MTTF) blir påvirket.

b) Angi et par eksempler på valg av akselererings-funksjoner ("stress-funksjoner") i disse modellene. Definer modellen som kalles Weibull-regresjon.

Oppgave 4

En har talt opp antall svikt, X, av en ventiltype i løpet av en total operasjonstid t.

a) En antar at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda \cdot t$. Hvilken fortolkning har da λ? En vil estimere λ ved hjelp av Bayes-metodikken, (og oppfatter altså λ som en realisasjon av en stokastisk variabel, Λ). Som a priori fordeling brukes Gamma-fordelingen (α, β), som har forventning α/β. Hva blir a posteriori fordelingen for λ?

b) Utled uttrykket for Bayes-estimatoren for λ (når en bruker kvadratisk tapsfunksjon). Fra tidligere erfaring med denne type ventiler antas at $\lambda \approx 0.1$ pr år. Hvilken a priori fordeling bør statistikeren bruke hvis han også mener at denne informasjonen er tilnærmet "likeverdig" med å observere feil på ventiler som har en samlet operasjonstid på 20 år?

c) Beregn så Bayes estimatoren når $X = 12$ og $t = 134$ år, og sammenlign med den vanlige SME for λ. Finn også et 90% "troverdighetsintervall" (*credibility interval*) for Λ. Bruk at for gitt $X = x$ vil

$$Z = 2(\beta + t) \cdot \Lambda$$

være χ^2-fordelt med $2(\alpha + x)$ frihetsgrader.

Oppgave 5

En har registrert svikt på en spesiell ventil opp til $\tau = 900$ dager etter start. Følgende data ble observert (i dager etter start):

S_i: 270, 520, 700, 810, 860

Det antas at dataen kan modelleres ved en ikke-homogen Poisson-prosess (NHPP).

a) Lag Nelson-Aalen plottet for dataene. Tyder plottet på at enheten er "forbedrende" eller "forverrende"? Gjennomfør *Laplace* testen for trend og konkludér.

b) Definer begrepet *ROCOF*. Anta at *ROCOF* for dataene er gitt ved uttrykket $w(t) = e^{\alpha + \beta \cdot t}$. Hva kalles denne modellen? Finn forventet antall feil opp til tid t i denne modellen. Se spesielt på tilfellet $\beta = 0$.

c) Sett opp rimelighetsfunksjonen når en bruker modellen som er spesifisert i b). Sett også opp de likningene som vil bestemme sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for α og β.

d) La $N(\tau)$ være antall svikt opp til tid $\tau = 900$ dager, og vis at SME for α blir

$$\alpha^* = \ln\left(\frac{N(\tau) \cdot \beta^*}{\exp(\beta^* \cdot \tau) - 1}\right)$$

der β^* = SME for β. Beregn α^* for det gitte datasettet, når det oppgis at $\beta^* = 0.003$. Tegn den estimerte kurven for forventet antall svikt i samme diagram som Nelson-Aalen plottet. Synes det som om modellen gir en rimelig tilpasning til dataene?