Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Bo Lindqvist
Tlf. 975 89 418

EKSAMEN I FAG SIF5075 LEVETIDSANALYSE

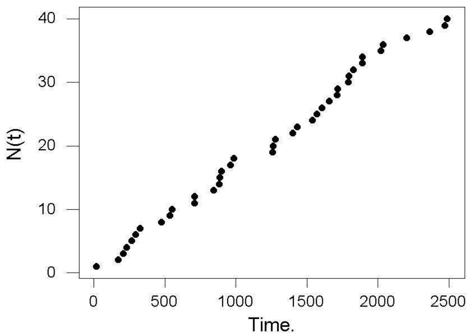
Fredag 8. august 2003

Tid: 09:00–14:00

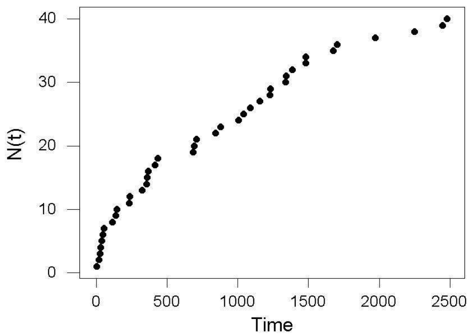
Tillatte hjelpemidler:
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler, samt kalkulatoren HP30S.

Sensur:

Oppgave 1



Figur 1



Figur 2

For et reparerbart system som observeres fra tid $t = 0$, lar vi $N(t)$ være antall feil i tiden $(0, t]$. I Figur 1 og 2 ovenfor er $N(t)$ plottet som funksjon av t for observasjoner fra to reparerbare systemer.

a) Anta at du på bakgrunn av disse plottene skal gjøre en foreløpig vurdering av mulige modeller. For hvert av de to plottene skal du skrive ned hvilke av følgende modeller du vil anse som enten *mulige* eller *lite sannsynlige*. Gi korte begrunnelser.

1. Homogen Poisson-prosess (HPP)
2. Fornyelsesprosess
3. Ikke-homogen Poisson-prosess (NHPP) med voksende intensitetsfunksjon
4. NHPP med avtagende intensitetsfunksjon

Oppgave 2

Plottet i Figur 2 i Oppgave 1 er basert på feiltidene $S_1, S_2, \ldots$ fra et reparerbart system som ble observert i tidsrommet $[0, \tau]$, der $\tau = 2500$ timer. I denne tiden ble det observert $N(\tau) = 40$ feil, der $N(t)$ er definert i Oppgave 1.

Man antar at dataene kommer fra en ikke-homogen Poisson prosess (NHPP) med parametrisk intensitetsfunksjon (ROCOF) av power-law type,

$$w(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} \text{ for } t > 0, \tag{1}$$

der $\lambda > 0$, $\beta > 0$ er ukjente parametre.

a) Finn den kumulative intensitetsfunksjon $W(t)$ for $t > 0$.

Hvilken fordeling har $N(\tau)$ under de gitte antagelsene?

Finn tettheten til tidspunktet S_1 for den første feilen. Hvilken kjent fordeling er dette?

b) Sett opp det generelle uttrykket for likelihoodfunksjonen for feiltidene $S_1, S_2, \ldots, S_{N(\tau)}$ for en NHPP med intensitetsfunksjon $w(t)$ og kumulativ intensitetsfunksjon $W(t)$.

Vis at log-likelihoodfunksjonen for modellen gitt ved (1) og dataene definert ovenfor, kan skrives

$$l(\lambda, \beta) = 40 \log \lambda + 40 \log \beta + (\beta - 1) \sum_{j=1}^{40} \log S_j - \lambda \cdot 2500^{\beta}$$

c) Finn maksimum likelihood estimatorene $\hat{\lambda}$ og $\hat{\beta}$ for λ og β.

Vis at $\hat{\beta}$ kan skrives

$$\hat{\beta} = \frac{40}{40 \log 2500 - \sum_{j=1}^{40} \log S_j}$$

Regn ut estimatene for λ og β når det oppgis at $\sum_{j=1}^{40} \log S_j = 237.24$.

Kommentér verdien på $\hat{\beta}$ i lys av plottet i Figur 2.

d) Den *observerte informasjonsmatrise* for (λ, β) er definert ved

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \beta} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}_{(\lambda,\beta)=(\hat{\lambda},\hat{\beta})}$$

Nedenfor kan du bruke, uten å vise det, at den *inverse* av den observerte informasjonsmatrise for de gitte dataene er

$$\begin{bmatrix} 0.1860 & 0.0350 \\ 0.0350 & 0.0070 \end{bmatrix}$$

Sett opp et standard 95% konfidensintervall for β.

Forklar hvordan du kan bruke dette intervallet til å teste nullhypotesen $\beta = 1$ mot den alternative hypotese $\beta \neq 1$.

Hvorfor kan det være av spesiell interesse å teste denne nullhypotesen?

e) Nullhypotesen $\beta = 1$ kan også testes ved å bruke log-likelihoodfunksjonen $l(\lambda, \beta)$.

Utfør denne testen med signifikansnivå 5%.

For å forenkle regningen oppgis at $l(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) = -195.21$.

Oppgave 3

En komponent av en bestemt type har levetid T, pålitelighetsfunksjon $R(t) = P(T > t)$ og kumulativ sviktintensitet $Z(t)$.

Man har for denne komponenttypen registrert følgende levetider (i dager):

61, 206, 348, 389*, 408, 485*, 604, 606*, 648*

De stjernemerkede observasjonene er sensurerte.

a) Regn ut Nelson's estimator for $Z(t)$ og tegn det tilsvarende plottet. Sett opp eventuelle betingelser som dataene må oppfylle.

Gir plottet noen indikasjon på voksende eller avtagende sviktintensitet?

b) Hvordan kan du bruke Nelson's estimator til å estimere pålitelighetsfunksjonen $R(t)$?

Regn ut estimatet du får for $R(t)$ på denne måten.

Regn også ut Kaplan-Meier estimatoren og sammenlign. (Plotting kreves ikke i dette punktet).

c) Testobservatoren W for Barlow-Proschans test får med de gitte dataene verdien 2.158 (du skal ikke beregne denne).

Hvilken konklusjon om komponentens sviktintensitet vil du trekke ut fra denne verdien for W?

Oppgave 4

Levetiden T for en type komponenter antas å være Weibull-fordelt med tetthet

$$f(t|\theta) = 2\theta t e^{-\theta t^2} \text{ for } t > 0$$

der $\theta > 0$ er en ukjent parameter.

Anta at n komponenter av denne typen testes inntil de feiler, med levetider betegnet $T_1, \ldots, T_n$. Disse antas for gitt θ å være uavhengige, hver med tetthet $f(t|\theta)$.

Man ønsker å estimere θ. Da man dessuten har apriori viten om θ, vil man bruke Bayes-estimering. Man oppfatter da θ som en realisasjon av en stokastisk variabel Θ. Som apriorifordeling for Θ brukes en gamma-fordeling med parametre $\alpha > 0,\ \beta > 0$ og tetthet

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0$$

Du kan bruke at denne fordelingen har forventning α/β.

a) Utled Bayes-estimatoren for θ basert på observasjonene $T_1, \ldots, T_n$ og apriori viten gitt gjennom $\pi(\theta)$.

b) Hvilke modifikasjoner må gjøres i Bayes-estimatoren for θ dersom observasjonene sensureres ved et gitt tidspunkt t_0 (type I sensurering)?