Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Per Hokstad
Tlf (735)92754

EKSAMEN I FAG SIF5075 LEVETIDSANALYSE
Onsdag 10. mai 2000
Tid: kl 0900 - 1400

Godkjente hjelpemidler:
Statistiske tabeller.

Oppgave 1.

En setter n komponenter i funksjon samtidig, og levetidene til disse komponentene, T_1 T_2, ... , T_n antas uavhengige og identisk fordelte. Når disse ordnes etter størrelse får en ordningsobservatoren $T_{(1)} < T_{(2)} < \ldots < T_{(n)}$.

Definer *total test tid* (TTT) ved tid $T_{(k)}$. Hva er spesielt TTT ved tid $T_{(n)}$? Beskriv hvordan en lager et TTT-plott, og forklar hvilken informasjon et slikt plott gir om levetidesfordelingen.

Oppgave 2.

En har registrert levetider (i dager) for en pumpe av type A:

160, 280, 390, 450*, 510, 580;
(observasjon nr. 4 som er merket med stjerne er sensurert).

a) Formuler en sensureringsmodell for forsøket. Sett opp rimelighetsfunksjonen (*likelihood function*) når en antar at levetidene er eksponensialfordelte med sviktintensitet λ.

b) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ. Hva er de asymptotiske egenskapene til estimatoren? Beregn estimatoren med de gitte data.

c) Beregn et (evt. tilnærmet) konfidensintervall for λ.

d) Hvordan vil du estimere sannsynligheten for at en komponent av denne typen overlever 600 dager?

e) En er usikker på om eksponensialfordelingen gir en tilfredsstillende tilpasning for disse dataene. En finner derfor også SME for parametrene α og λ i en Weibullfordeling. Formuler en hypotese for problemstillingen og gjennomfør testen. Hva blir konklusjonen hvis log-likelihood med Weibullmodellen blir -33.11; (dette er altså ln av rimelighetsfunksjonen, innsatt SME for α og λ).

Oppgave 3.

a) Beskriv kort levetidsmodeller med kovariater ("stressorer"). Definer de parametriske modellene som består i å akselerere tiden. Angi spesielt uttrykket for overlevelsesfunksjonen og vis hvordan blir forventet levetid (MTTF) påvirket. Angi et par eksempler på valg av akselererings-funksjoner ("stress-funksjoner").

b) Definer proporsjonal hasard (PH) modellen, og angi spesielt Cox-modellen. Hva blir nå uttrykket for overlevelsesfunksjonen. Hvilke(n) fundamentale antakelse(r) ligger til grunn for PH-modellene.

Oppgave 4

En har registrert svikt på en spesiell pumpe opp til $\tau = 500$ dager etter start. Følgende data ble observert (i dager etter start):

S_i: 150, 290, 390, 450, 480

Det antas at dataen kan modelleres ved en ikke-homogen Poisson prosess (NHPP).

a) Tegn Nelson-Aalen plottet for dataene. Gjennomfør også *Military Handbook* testen for trend.

b) Anta at *ROCOF* er gitt ved uttrykket $w(t) = \lambda\beta \cdot t^{\beta-1}$. Finn forventet antall feil opp til tid t i denne modellen, og spesifiser navnet som blir brukt på modellen. Skriv også ned *likelihood function*.

c) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene (SME) for λ og β. La $N(\tau)$ = antall svikt opp til tid τ, og vis at SME for β blir lik

$$\beta^* = \frac{N(\tau)}{N(\tau)\cdot \ln(\tau) - \sum_{i=1}^{N(\tau)} \ln(S_i)}$$

d) Beregn λ^* og β^* med de gitte data og tegn den estimerte kurven for forventet antall svikt i samme diagram som Nelson-Aalen plottet.

e) Formuler og test nå hypotesen om ingen trend i dataene.

Oppgave 5

En pumpe av typen A antas *ikke* å starte med sannsynlighet p (etter driftsstans). La X være antall ganger pumpa *ikke* starter (tilstrekkelig raskt) ved n oppstartsforsøk. En vil estimere p ved hjelp av Bayes-metodikk.

a) Hva er fordelen ved å a velge beta-fordelingen

$$f_P(p) = \left[\frac{\Gamma(r)\cdot\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}\right]^{-1} p^{r-1}(1-p)^{s-1}, \qquad 0 \le p \le 1; r > 0, s > 0$$

som a priori fordeling? Bruk i fortsettelsen at forventningen i denne fordelingen er r/(r+s). Utled uttrykket for Bayes-estimatoren for p (når en bruker kvadratisk tapsfunksjon).

b) Fra tidligere erfaring med denne type pumper antas at $p \approx 0.02$. Hvilken a priori fordeling bør statistikeren bruke hvis han også mener at denne informasjonen er tilnærmet "likeverdig" med å observere 10 nye oppstarter? Beregn Bayes estimatoren når $n = 90$ og X observeres til 5. Foreslå til slutt en såkalt "ikke-informativ" a priori fordeling, og finn tilhørende Bayes estimator.