Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Per Hokstad
Tlf.: (735)9 27 54,
90 58 41 32.

EKSAMEN I FAG SIF5075 LEVETIDSANALYSE

Lørdag 19. mai 2001
Tid: kl 0900 - 1400

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator.
Statistiske tabeller (Tapir).
Tabeller og formler i statistikk (Tapir).
Se også vedlagt formelark (s.4).

SENSURDATO: Tirsdag 5. JUNI

Oppgave 1.

a) En har registrert tid til svikt (i måneder) for en ventil:

18, 32, 45, 55*, 60, 73, 87, 90*.

Måling nr. 4 og 8 som er merket med stjerne er sensurerte. Levetidene oppfattes som uavhengige identisk fordelte observasjoner.

Formuler sensureringsmodellen og finn Nelsons estimator for kumulativ sviktintensitet, $Z(t) = \int_0^t z(u)\,du$ i fordelingen. Gir plottet noen *indikasjon* på voksende/avtakende sviktintensitet?

b) Start med definisjonen av sviktintensitet, $z(t)$, og utled sammenhengen en har mellom $Z(t)$ og overlevelsesfunksjonen, $R(t)$. Finn Nelson-estimatoren for overlevelsesfunksjonen til dataene i a) og lag et plott.

Oppgave 2.

En setter n komponenter i funksjon ved tid 0, og levetidene til disse komponentene, $T_1, T_2, \ldots, T_n$ antas uavhengige og identisk fordelte.

a) Anta at observasjonene har følgende sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\lambda^3 t^2 \exp(-\lambda t)$$

Hvilken fordelingsklasse hører denne fordelingen til? Hvilken sammenheng har denne til eksponensialfordelingen. Bruk sammenhengen til å påvise at $E(T) = 3/\lambda$.

b) Utled og beregn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ, når en har følgende 5 levetider (i år): 2.2, 2.9, 3.5, 3.8, 4.6.

c) Hva er de asymptotiske egenskapene til SME for λ? Bruk dette til å finne et tilnærmet 90% konfidensintervall for λ.

d) Gjennomfør sannsynlighetskvotetesten for H_0: $\lambda = 1.0$.

Oppgave 3

I denne oppgaven kan en bruke at en stokastisk variabel, X som er invers gamma-fordelt med parametre a og b har sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{a+1} e^{-b/x}$$

og forventningen er $E(X) = b/(a-1)$; $a>1$.

a) En har observert tid til svikt/sensurering for n komponenter av samme type. Anta at tid til svikt, T, har sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \tfrac{1}{\theta}\exp(-t/\theta)$$

Hva er her $E(T)$? Anta at observasjonene er fremkommet ved sensurering av type IV, og sett opp uttrykket for rimelighets-funksjonen (*likelihood*).

En vil estimere θ ved hjelp av Bayes-metodikken. Som a priori fordeling vil en bruke en invers gamma-fordeling. Hva blir uttrykket for a posteriori fordelingen for θ?

b) Utled uttrykket for Bayes-estimatoren for θ (når en bruker kvadratisk tapsfunksjon). Fra tidligere erfaring med denne type ventiler antas at $\theta \approx 5$ år (=60 mnd). Hvilken a priori fordeling bør statistikeren bruke hvis han også mener at denne informasjonen er tilnærmet "likeverdig" med å observere feil på komponenter med en samlet operasjonstid på 10 år?

Beregn så Bayes-estimatoren når observasjonene er som gitt i oppgave 1a).

c) Vis at når X er invers gammafordelt (a, b) vil $Z = 2b/X$ bli χ^2-fordelt med $2a$ frihetsgrader. Finn et 90% "troverdighetsintervall" (*credibility interval*) for θ.

Oppgave 4

a) La $N(t)$ være antall hendelser opp til tid t i en telleprosess, (med $N(0) = 0$). Sett $W(t) = E(N(t))$. Hvilken sammenheng er det mellom $W(t)$ og ROCOF, $w(t)$? Hvilken fortolkning har en av $w(t)$ utover denne sammenhengen med $W(t)$? Hva menes spesielt med en ikkehomogen Poisson-prosess, og hvilken fordeling har da $N(t)$?

b) En har registrert svikt på en spesiell ventil opp til $\tau = 95$ måneder etter start. Følgende svikttider ble observert (i måneder etter start):

S_i: 30, 49, 68, 80, 86, 92

Lag Nelson-Aalen plottet for dataene. Gjennomfør *Laplace*-testen for trend og konkludér. Hvilke forutsetninger ligger til grunn for bruk av denne testen?

c) Weibull Trend Renewal Process (WTRP) er gitt ved at $W(S_1)$, $W(S_2) - W(S_1)$, $W(S_3) - W(S_2)$, ... blir uavhengige og identisk fordelte variable som er Weibull-fordelte:

$R(t) = 1 - \exp(-t^{\beta})$.

Videre er $W(t) = a \cdot t^{b}$.

Forklar hvilke modeller vi får som spesialtilfeller ved å sette:
(i) $b = 1$
(ii) $\beta = 1$
(iii) $b = \beta = 1$

d) Anta at noen observasjoner har gitt følgende verdier av *log likelihood* for henholdsvis den fulle modellen og de aktuelle spesialtilfeller:

Modell	*log likelihood*
Full modell	- 673.25
$\beta = 1$	- 674.48
$b = 1$	- 677.52
$b = \beta = 1$	- 678.65

Formulér aktuelle hypoteser om den underliggende modellen, og bruk disse verdiene til å trekke konklusjoner. Hvilken modell vil du anbefale brukt?

Formelark.
Noen estimatorer og testobservatorer.

Kaplan-Meier estimator:

$$R(Y_{(j)})=\prod_{i=1}^{j}\left(\frac{n-i}{n-i+1}\right)^{d_i}$$

Nelson estimator:

$$Z(Y_{(j)})=\sum_{i=1}^{j} d_i\cdot\left(\frac{1}{n-i+1}\right)$$

Barlow-Proschan test:

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)S_i}{\sum_{i=1}^{k} S_i}$$

Laplace test:

$$W=\frac{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} S_j - S_n/2}{S_n/\sqrt{12(n-1)}}$$

Military Handbook test:

$$Z=2\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{S_n}{S_i}$$