**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Jo Eidsvik 901 27 472

# EKSAMEN I FAG SIF5075 LEVETIDSANALYSE

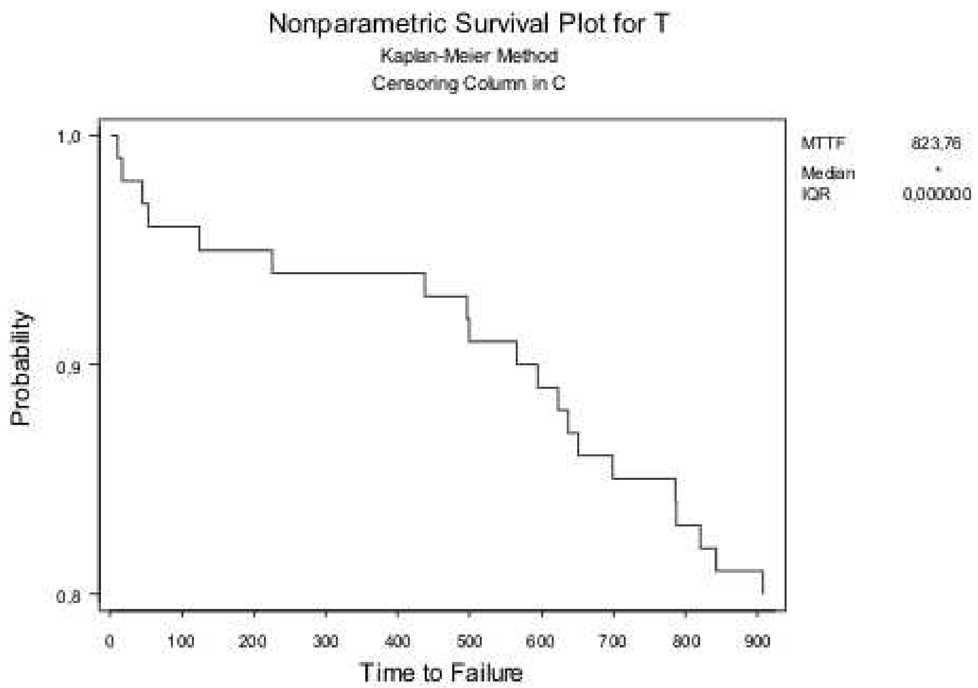
Torsdag 22. mai 2003

Tid: 09:00–14:00

*Tillatte hjelpemidler:*
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler, samt kalkulatorene HP30S og Casio fx-350W.

Sensur: 12. juni 2003

## Oppgave 1



Levetiden $T$ til en bestemt komponent er studert gjennom et laboratorieforsøk. Et tilfeldig utvalg på n=100 komponenter ble satt på test ved tidspunkt 0. Forsøket løp til tidspunktet $t_0 = 1000$ (timer). Da hadde $R = 20$ enheter feilet. Feiltidene $t_1, \ldots, t_{20}$ (i timer) for de feilende enhetene ble notert.

**a)** Hva kaller vi den type sensurering som ble brukt i forsøket?

Figuren på Side 1 av oppgavesettet viser et Kaplan-Meier plott (KM-plott) basert på de observerte feiltidene.

Hva er det som estimeres ved dette plottet, og hvilke forutsetninger bygger det på? Gjør kort rede for at disse er oppfylt i dette tilfellet.

Bruk plottet til å anslå $P(T \leq 400)$.

Definer $p$-kvantilen $t_p$ ved $P(T \leq t_p) = p$ for $0 < p < 1$. Anslå $t_{0.10}$ fra KM-plottet.

Hvorfor kan ikke medianen $t_{0.50}$ estimeres ut fra KM-plottet?

Basert på fysisk kunnskap om feilmekanismene brukte ingeniørene en eksponensiell fordeling som modell for komponentens levetid. Levetiden $T$ ble dermed antatt å ha tetthet

$$f(t;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta};\ t > 0$$

der $\theta > 0$ er en ukjent parameter. Denne modellen skal brukes i resten av oppgaven.

**b)** Hvilken fortolkning har parameteren $\theta$ i den gitte modellen?

Finn likelihood-funksjonen $L(\theta)$ basert på forsøket beskrevet i begynnelsen av oppgaven. Begrunn utledningen av likelihood-uttrykket ut fra den type sensurering som er brukt.

Vis at log-likelihood funksjonen kan skrives

$$l(\theta) = -20 \log \theta - (1/\theta) \left( \sum_{i=1}^{20} t_i + 80 t_0 \right)$$

**c)** Finn et uttrykk for maksimum likelihood estimatoren $\hat{\theta}$ for $\theta$.

Finn en estimator for standardavviket til $\hat{\theta}$.

Regn ut estimatet for $\theta$ når det er oppgitt at $\sum_{i=1}^{20} t_i = 9816$.

Hva blir da 95%-standardintervallet for $\theta$?

**d)** Finn en estimator for $p$-kvantilen $t_p$ (definert i punkt a) for $0 < p < 1$.

Hva blir estimatet for $t_{0.10}$ når du bruker den oppgitte $\sum_{i=1}^{20} t_i$ fra forrige punkt? Sammenlign med svaret fra punkt (a).

Fra tidligere erfaring hadde man antatt at $t_{0.10} = 700$. For å undersøke eventuelle endringer ønsket man å teste

$$H_0 : t_{0.10} = 700 \text{ mot } H_1 : t_{0.10} \neq 700$$

Utled en test for dette ved å bruke log-likelihood funksjonen $l(\theta)$. Velg signifikansnivå tilnærmet 5%. Hva blir konklusjonen når du bruker den oppgitte $\sum_{i=1}^{20} t_i$ fra forrige punkt?

*(Vink: Finn en verdi $\theta_0$ av $\theta$ slik at $H_0$ er ekvivalent med hypotesen $\theta = \theta_0$).*

**e)** Kan man estimere $\theta$ dersom man ikke kjenner de enkelte feiltidene $t_1, \ldots, t_{20}$, men bare vet at $R = 20$?

Foreslå i så fall en estimator $\tilde{\theta}$ som er en funksjon av bare $R$ og $t_0$.

## Oppgave 2

Nedenfor er gitt tidspunkter for utskifting av ventilseter i fire dieselmotorer. For hver motor er angitt antall dager motoren har vært under observasjon (fra den var ny), samt tidspunktene (målt i antall dager siden observasjonsstart) for alle utskiftinger i denne tiden. Merk at for motor nr. 2 har det ikke vært utskiftinger.

| Motor nr. | Dager under observasjon | Utskifting | |
|---|---|---|---|
| 1 | 389 | 206 | 348 |
| 2 | 485 | | |
| 3 | 606 | 408 | 604 |
| 4 | 648 | 61 | |

Det antas at tidspunktene for utskifting av ventilsete for en motor av denne typen kan modelleres ved en ikke-homogen Poisson-prosess (NHPP) med ROCOF $w(t)$ for $t \geq 0$. Videre antas at utskiftingstidspunkter for ulike motorer er stokastisk uavhengige.

**a)** Tegn Nelson-Aalen plottet for disse dataene. Hva er det som estimeres ved dette plottet? Forklar hvordan du beregner koordinatene til punktene i diagrammet.

Les av (omtrentlig!) fra plottet et anslag for forventet antall utskiftinger i løpet av ett år for en motor av denne typen.

**b)** Regn ut estimerte standardavvik for hvert av punktene i plottet. Tegn inn tilnærmede 95% konfidensgrenser for hvert punkt.

**c)** Tyder plottet i punkt (a) på at det er noen sammenheng mellom alder og utskiftingshyppighet?

Man vil teste nullhypotesen at det ikke er noen slik sammenheng, mot den alternative hypotese at utskiftingshyppigheten er voksende. Formuler dette som hypoteser om ROCOF-funksjonen $w(t)$.

Gjør kort rede for en eller flere metoder for å teste dette basert på de gitte dataene. Du trenger ikke gjøre alle involverte beregninger.

## Oppgave 3

En komponent antas under normalstress å ha overlevelsesfunksjon (reliability function) $R_0(t)$ og hasardfunksjon (sviktintensitet) $z_0(t)$.

Man ønsker å estimere påliteligheten av denne komponenttypen ved hjelp av akselerert levetidstesting. Dette gjøres ved å utsette komponenter for stress $s$, $0 \leq s < \infty$, og måle levetiden (eventuelt sensurerte levetider). Normalstress svarer til $s = 0$.

To modeller betraktes:

**Modell 1: Proporsjonal hasardmodell.** Under stress $s$ har komponenten hasardfunksjon

$$z_s^{PH}(t) = z_0(t)g(s)$$

for en funksjon $g(s)$ med g(0)=1.

**Modell 2: Akselerert levetidsmodell.** Under stress $s$ har komponenten overlevelsesfunksjon

$$R_s^{AL}(t) = R_0(\phi(s)t)$$

for en funksjon $\phi(s)$ med $\phi(0) = 1$.

**a)** Forklar kort hva som er hensikten med akselerert levetidstesting. Hva er ideen bak de to modellene? Hva uttrykker de to funksjonene $g(s)$ og $\phi(s)$?

**b)** La $R_s^{PH}(\cdot)$ være overlevelsesfunksjonen for en komponent under stress $s$ i Modell 1. Vis at

$$R_s^{PH}(t) = R_0(t)^{g(s)}$$

La videre $z_s^{AL}(\cdot)$ være hasardfunksjonen for en komponent under stress $s$ i Modell 2. Uttrykk $z_s^{AL}(\cdot)$ ved funksjonene $z_0(\cdot)$ og $\phi(\cdot)$.

**c)** Anta at komponentens levetid under normalstress er Weibull$(\alpha, \theta)$, definert ved

$$R_0(t) = e^{-(t/\theta)^\alpha}$$

Vis at levetiden under stress $s > 0$ også er Weibull-fordelt under begge modellene. Hva blir parametrene i de tilsvarende Weibull-fordelingene?

I hvilken forstand kan vi si at Modell 1 og Modell 2 er ekvivalente ved Weibull-fordelte levetider?