

Factorial Experiments

Eksempel 1

Samanhengen mellom utbytte av ein kjemisk prosess og dei to faktorane temperatur og konsentrasjon skulle undersøkjast. Det blei utført 4 forsøk der ein nytta 2 verdiar for kvar av faktorane temperatur og konsentrasjon. Dette gjev 4 moglege nivåkombinasjonar av dei to faktorane til å teste ut utbytte. Forsøket er sett opp i tabellen nedanfor, der og det registrerte utbytte av responsen er gitt:

	x1	x2	y
Forsøksnr.	Temperatur	Konsentrasjon	Utbytte
1	160	20	60
2	180	20	72
3	160	40	54
4	180	40	68

Ein modellsamanheng av typen $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2$ kan då estimerast ut i frå dataane der dei 4 verdiane for utbytte er dei observerte responsverdiane og designmatrixa \mathbf{X} består av ei kolonne av 1-tal, ei kolonne med verdiane for temperatur, ei med verdiane for konsentrasjon og ei kolonne med produktet av verdiane for temperatur og konsentrasjon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 160 & 20 & 3200 \\ 1 & 180 & 20 & 3600 \\ 1 & 160 & 40 & 6400 \\ 1 & 180 & 40 & 7200 \end{bmatrix}$$

73

Regression Analysis: utbytte versus temp; kons; temp*kons

The regression equation is

$$\text{utbytte} = -14,0 + 0,500 \text{ temp} - 1,10 \text{ kons} + 0,00500 \text{ temp*kons}$$

Predictor	Coef
Constant	-14,0000
temp	0,500000
kons	-1,10000
temp*kon	0,00500000

I første omgang skal vi berre feste oss ved dei estimerte koeffisientane :

$$\begin{bmatrix} b_0 = -14 \\ b_1 = 0.5 \\ b_2 = -1.1 \\ b_{12} = 0.005 \end{bmatrix}$$

74

La oss no kode om faktorane ved å innføre nye faktorar $z_1 = \frac{x_1 - 170}{10}$ og $z_2 = \frac{x_2 - 30}{10}$. Verdiane for faktorane er altså sentrert, og i tillegg har vi delt ned på halvparten av avstanden mellom høgt og lågt nivå.

Design matrisa i z_1, z_2 og z_{12} blir då:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Legg merke til at den nye designmatrisa har berre ortogonale kolonner slik at om vi skal rekne ut koeffisientane får vi frå (1) at

$$\begin{aligned} b_0^* &= \frac{60 + 72 + 54 + 68}{4} = 63.5 \\ b_1^* &= \frac{-60 + 72 - 54 + 68}{4} = 6.5 \\ b_2^* &= \frac{-60 - 72 + 54 + 68}{4} = -2.5 \\ b_{12}^* &= \frac{60 - 72 - 54 + 68}{4} = 0.5 \end{aligned}$$

75

Regression Analysis: utbyte versus temp; kons; temp*cons

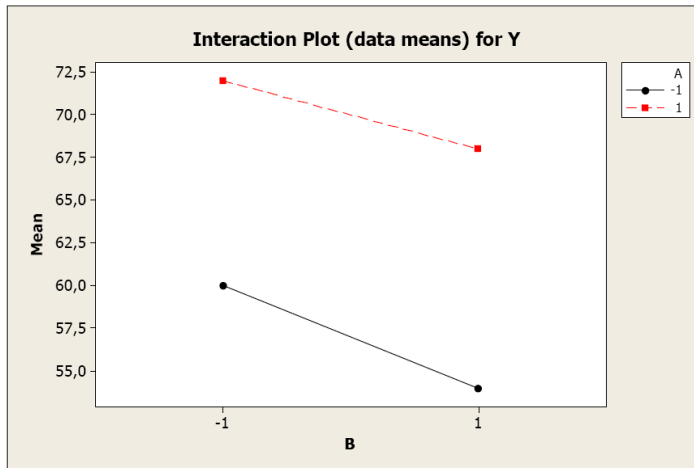
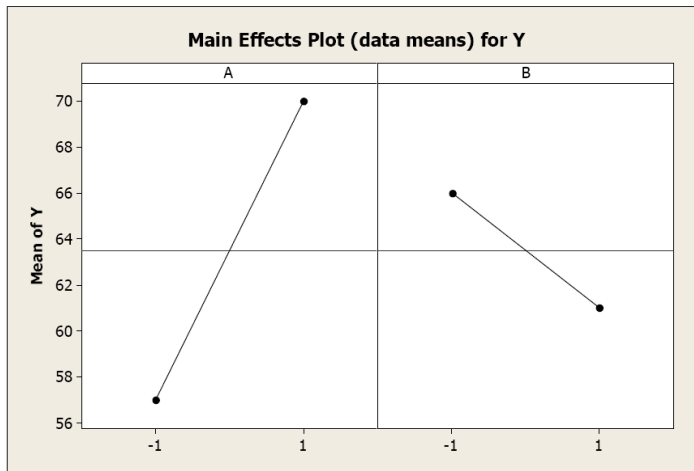
The regression equation is
 utbyte = 63,5 + 6,50 otemp - 2,50 okons + 0,500 otemp*ocons

Predictor	Coef
Constant	63,5000
temp	6,50000
kons	-2,50000
temp*con	0,500000

For å sjå at vi har same modell kan vi sette inn for z_1, z_2 og z_{12} som gjev:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 63.5 + \frac{6.5(x_1 - 170)}{10} - 2.5 \frac{(x_2 - 30)}{10} + 0.5 \frac{(x_1 - 170)(x_2 - 30)}{10 \cdot 10} \\ &= 63.5 - 110.5 + 7.5 + 25.5 + 0.65x_1 - 0.15x_1 - 0.25x_2 - 0.85x_2 + 0.005x_1x_2 \\ &= -14 + 0.5x_1 - 1.1x_2 + 0.005x_1x_2 \end{aligned}$$

76



77

Contrasts for computation of effects

A	B	AB
Temp	Konsentrasjon	Temp*Kons
-	-	+
+	-	-
-	+	-
+	+	+

Level code

A	B	Nivåkode
-	-	1
+	-	a
-	+	b
+	+	ab

78

Three factors

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Nivåkode	y
-	-	-	+	+	+	-	1	60
+	-	-	-	-	+	+	a	72
-	+	-	-	+	-	+	b	54
+	+	-	+	-	-	-	ab	68
-	-	+	+	-	-	+	c	52
+	-	+	-	+	-	-	ac	83
-	+	+	-	-	+	-	bc	45
+	+	+	+	+	+	+	abc	80
z1	z2	z3	z12	z13	z23	z123		

Estimerede hovedeffektar blir:

$$\hat{A} = \frac{72 + 68 + 83 + 80}{4} - \frac{60 + 54 + 52 + 45}{4} = 23$$

$$\hat{B} = \frac{54 + 68 + 45 + 80}{4} - \frac{60 + 72 + 52 + 83}{4} = -5$$

$$\hat{C} = \frac{52 + 83 + 45 + 80}{4} - \frac{60 + 72 + 54 + 68}{4} = 1.5$$

79

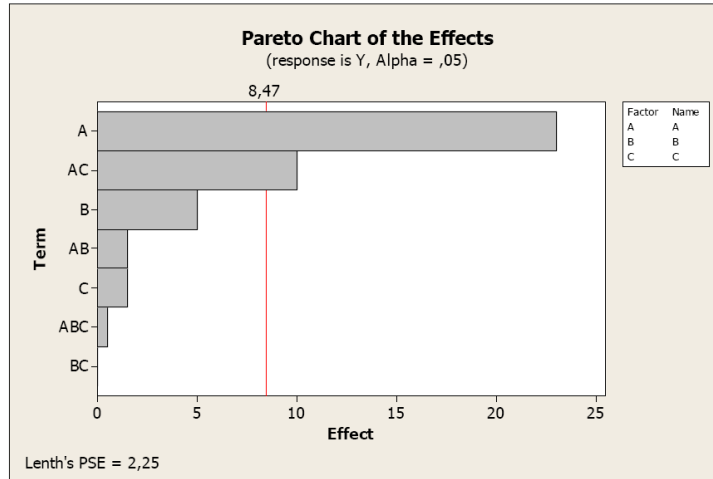
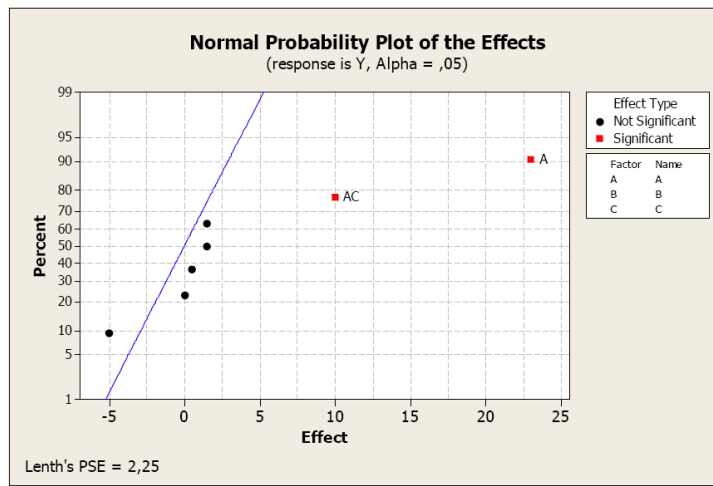
$$\hat{AB} = \frac{60 + 68 + 52 + 80}{4} - \frac{72 + 54 + 83 + 45}{4} = 1.5$$

$$\hat{AC} = \frac{60 + 54 + 83 + 80}{4} - \frac{72 + 68 + 52 + 45}{4} = 10$$

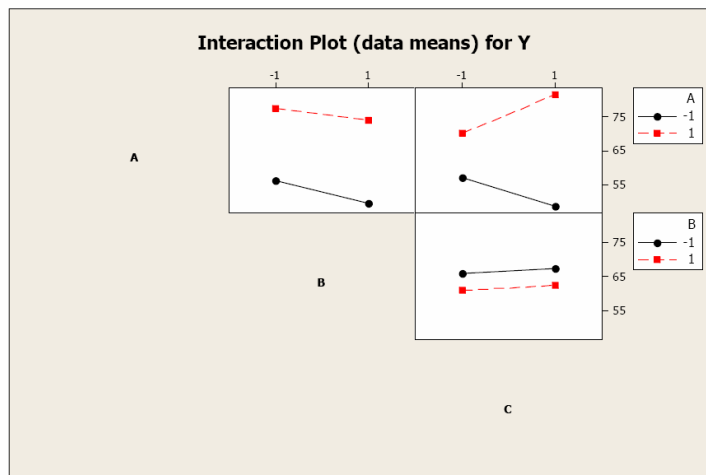
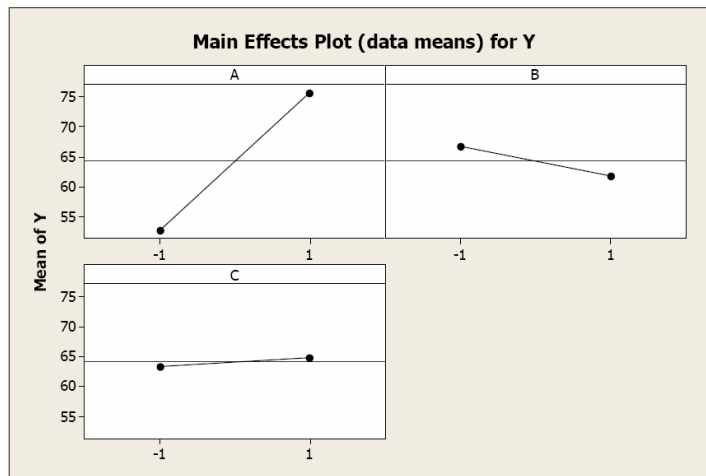
$$\hat{BC} = \frac{45 + 80 + 60 + 72}{4} - \frac{83 + 52 + 68 + 54}{4} = 0$$

$$\hat{ABC} = \frac{80 + 52 + 54 + 72}{4} - \frac{83 + 45 + 60 + 68}{4} = 0.5$$

80



81



82