

Bokmåls tekst  
Faglig kontakt under eksamen:  
John Tyssedal, telefon 73593534

## Eksamen i fag SIF 5066 Forsøksplanlegging og anvendte statistiske metoder

Mandag 12. mai 2003  
Tid: 09.00-14.00

Hjelpemidler: Alle skrevne og trykte hjelpemidler. Enkel lommekalkulator  
Tapir: Formler og tabeller i statistikk/Statistiske tabeller og formler

Sensuren faller 2. juni.

### Oppgave 1.

En kulelagerfabrikk hadde problemer med levetiden til kulelagerene de produserte. Det ble utført flere forsøk for å finne årsaker til dette. I et av disse var følgende 4 faktorer med, hver på 2 nivå.

	Nivå	
	-	+
A: Type av kule	standard	modifisert
B: Buret kula ligg i	standard	modifisert
C: Type smøring	standard	modifisert
D: Mengde smøring	normal	stor

Levetiden av kulelageret ved akselerert levetidstesting ble brukt som respons. Resultat fra forsøket i den rekkefølge enkeltforsøkene ble utførte er gitt nedenfor.

Forsøk	A	B	C	D	Y
1	-	-	-	-	0.31
2	-	+	+	-	0.92
3	+	+	+	+	2.57
4	+	-	-	+	1.38
5	+	+	-	-	2.17
6	-	+	-	+	0.73
7	-	-	+	+	0.95
8	+	-	+	-	1.37

- a) Hva slags forsøk er dette? Hva blir definerende relasjon? Hvilken resolusjon har forsøket? Regn ut estimater for hovedeffekten av faktor A og tofaktorsamspillet, AB, mellom faktorene A og B.
- b) Estimerte effekter fra de 8 forsøkene for effektene B, C, D, AC og AD er gitt ved 0.60, 0.31, 0.22, -0.11 og -0.01 i gitt rekkefølge. Hva blir estimatet for effektene CD, BD, BC, BCD, ACD, ABD og ABC? Grunngi svaret. Anta at faktorene C og D ikke påvirker responsen. Forklar hvorfor vi da kan se på forsøket som et gjentatt  $2^2$  forsøk. Finn et estimat for variansen til effektene og vurder om effektene A, B, og AB er signifikante.
- c) Tolk resultatet av forsøket. Forsøket ovenfor ble egentlig utført i 2 blokker der enkeltforsøkene 1 - 4 var i en blokk og enkeltforsøkene 5 - 8 var i den andre. Finn ut hvorledes forsøket er blokkdelt. Hvilken innvirkning har denne blokkdelingen på analysen av hvilke effekter som er signifikante i 1 b) ? (Du skal fremdeles anta at C og D ikke påvirker responsen.)

## Oppgave 2

Det var av interesse å finne ut om innføring av et sikkerhetsprogram reduserte fraværet i ulike bedrifter på grunn av arbeidsrelaterte ulykker. Som en pilotstudie brukte en data fra 5 tilfeldig valgte bedrifter med sikkerhetsprogram og 5 tilfeldige valgte bedrifter uten. Dataene er gitt nedenfor og står for tapt arbeidstid (målt i 1000 timer) i et år på grunn av arbeidsrelaterte ulykker.

Med sikkerhetsprogram	73	35	40	71	44
Uten sikkerhetsprogram	169	72	129	31	178

Det ble utført 2 t-tester. I den første ble det antatt lik varians i de to utvalgene:

### Two-Sample T-Test and CI: med sikkerhetsprogram; uten sikkerhetsprogram

Two-sample T for med sikkerhetsprogram vs uten sikkerhetsprogram

	N	Mean	StDev	SE Mean
med sikkerhetsprogram	5	52,6	18,0	8,1
uten sikkerhetsprogram	5	115,8	63,2	28

Difference = mu med sikkerhetsprogram - mu uten sikkerhetsprogram  
 Estimate for difference: -63,2  
 95% upper bound for difference: -8,5  
 T-Test of difference = 0 (vs <): T-Value = -2,15 P-Value = 0,032 DF = 8  
 Both use Pooled StDev = 46,5

I den andre tillot en variansen å være forskjellig.

### Two-Sample T-Test and CI: med sikkerhetsprogram; uten sikkerhetsprogram

Two-sample T for med sikkerhetsprogram vs uten sikkerhetsprogram

	N	Mean	StDev	SE Mean
med sikkerhetsprogram	5	52,6	18,0	8,1
uten sikkerhetsprogram	5	115,8	63,2	28

Difference = mu med sikkerhetsprogram - mu uten sikkerhetsprogram  
 Estimate for difference: -63,2  
 95% upper bound for difference: -0,5  
 T-Test of difference = 0 (vs <): T-Value = -2,15 P-Value = 0,049 DF = 4

- Formuler spørsmålstillingen ovenfor som en hypotesetest. Sett opp uttrykkene for testobservatorene som er brukt i de to testene? Hvilken av de to testene stoler du mest på i denne situasjonen? (Bruk forutsetningene for testene til å grunngi svaret.) Hva blir konklusjonen når du bruker et signifikansnivå på 5 %? Grunngi svaret.
- Det ble og foreslått å analysere dataene ved hjelp Wilcoxon toutvalgs test. Utfør en slik test. Hva blir nå konklusjonen? Bruk 5% signifikansnivå. Hvilken av testene i 2a) og 2b) vil du anbefale brukt i denne situasjonen? Grunngi svaret.

Dataene over er bare en del av et større datasett der en og har med tallet på tilsatte i bedriften. Hele datasettet har med 20 bedrifter uten sikkerhetsprogram og 20 med sikkerhetsprogram.

La variablene  $x_1, x_2$  og  $Y$  være gitt ved:

$$x_1 = \text{talet på tilsatte}$$

$$x_2 = \begin{cases} 0, & \text{uten sikkerhetsprogram} \\ 1, & \text{med sikkerhetsprogram} \end{cases}$$

$$Y = \text{årlig tapt arbeidstid på grunn av ulykker (målt i 1000 timer)}$$

En regresjonsanalyse med  $Y$  som responsvariabel og  $x_1$  og  $x_2$  som regresjonsvariabler ble utført. Utskrift fra programpakken MINITAB er gitt nedenfor.

The regression equation is  
tapt arbeidstid = 31,7 + 0,0143 tilsatte - 58,2 sikkerhetsprogram

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	31,670	8,560	?	0,001
tilsatte	0,014272	?	11,68	0,000
sikkerhetsprogram	?	6,316	-9,22	0,000

S = 19,97      R-Sq = 85,9%      R-Sq(adj) = 85,2%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	90058	45029	112,94	0,000
Residual Error	37	14752	399		
Total	39	104811			

Source	DF	Seq SS
tilsatte	1	56174
sikkerhetsprogram	1	33885

#### Unusual Observations

Obs	tilsatte	tapt arb	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
39	7794	46,00	84,68	5,05	-38,68	-2,00R

- c) Fyll inn de verdiene som skal være der det står ?. Har modellen signifikant forklaringsgrad? (Sett opp hypotesetesten, velg signifikansnivå selv og konkluder ut i fra utskriften). Hvor mye av variasjonen i dataene er forklart ved hjelp av modellen. Sett opp estimatoren for variansen til feilleddet. Hva blir estimatet?

En studie av residualplottet (ikke vedlagt) indikerte at modellen burde forbedres, og det ble bestemt å prøve en modell der kryssleddet  $x_1 x_2$  var med i modellen. Utskrift fra en analyse med MINITAB for denne modellen er gitt nedenfor.

### Regression Analysis: tapt arbeidstid versus tilsatte; tilsattexsikkerhetsprogram; sikkerhetsprogram

The regression equation is  
 tapt arbeidstid = - 0,74 + 0,0197 tilsatte - 0,0107 tilsattexsikkerhetsprogram  
 + 5,4 sikkerhetsprogram

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-0,739	7,927	-0,09	0,926
tilsatte	0,019696	0,001219	16,16	0,000
tilsattexsikkerhetsprogram	-0,010737	0,001715	-6,26	0,000
sikkerhetsprogram	5,37	11,08	0,48	0,631

S = 14,01      R-Sq = 93,3%      R-Sq(adj) = 92,7%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	97749	32583	166,11	0,000
Residual Error	36	7062	196		
Total	39	104811			

Source	DF	Seq SS
tilsatte	1	56174
tilsattexsikkerhetsprogram	1	41529
sikkerhetsprogram	1	46

#### Unusual Observations

Obs	tilsatte	tapt arb	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
39	7794	46,00	74,45	3,90	-28,45	-2,11R

R denotes an observation with a large standardized residual

- d) Har alle forklaringsvariablene signifikant forklaringsgrad gitt at de andre er med i modellen? (Grunngi svaret og forklar hvilken test du bruker for å avgjøre dette). Forklar forskjellen på en modell der konstantleddet og regresjonsvariablene  $x_1, x_2$  og  $x_1 x_2$  er med og en modell der berre konstantleddet,  $x_1$  og  $x_1 x_2$  er med. Bruk utskriften til å regne ut  $R^2$ , estimat for variansen til feilleddet og Mallows  $C_p$  for den siste modellen.

### Oppgave 3.

En forskningsinstitusjon hadde 5 målere for infrarød stråling og ønsket å finne ut om disse essensielt gav like avlesinger. Et forsøk ble gjort der en for hver av 15 objekter leste av en verdi for hver av de 5 målerne. De 15 objektene var alle forskjellige med hensyn til materiale, temperatur og størrelse.

Nedenfor er det synt utskrift av to analyser med MINITAB.

#### One-way ANOVA: stråling versus måler

Analysis of Variance for stråling				
Source	DF	SS	MS	
måler	4	0,202	0,051	F
Error	70	45,751	0,654	P
Total	74	45,954		

				Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev			
Level	N	Mean	StDev	-----+-----+-----+-----+-----			
1	15	2,3120	0,8249	(------*-----)			
2	15	2,1933	0,8117	(------*-----)			
3	15	2,2980	0,8007	(------*-----)			
4	15	2,3193	0,8161	(------*-----)			
5	15	2,3427	0,7883	(------*-----)			
Pooled StDev = 0,8085				1,80	2,10	2,40	2,70

#### Two-way ANOVA: stråling versus objekt; måler

Analysis of Variance for stråling					
Source	DF	SS	MS	F	P
objekt	14	45,48159	3,24869	674,29	0,000
måler	4	0,20219	0,05055	10,49	0,000
Error	56	0,26981	0,00482		
Total	74	45,95359			

a) Er det grunn til å påstå at de 5 målerne gir forskjellige målinger? I begrunnelsen skal du presisere hvilken modell du velger, hvilke forutsetninger du gjør, formulere nullhypotese og alternativ hypotese, velge signifikansnivå og begrunne konklusjonen.

(1)

Løysingsforslag 5175066. Forsøksplanlegging og  
anvendte statistiske metoder.

1 a)

$2^{4-1}$  s: halvfraksjon av et  $2^4$  forsøk,  $I = ABCD$

$I = ABCD \Rightarrow$  resolusjon IV

$$\hat{A} = \frac{2.57 + 1.38 + 2.17 + 1.37}{4} - \frac{0.31 + 0.92 + 0.73 + 0.95}{4} = \underline{1.145}$$

$$\hat{AB} = \frac{2.57 + 0.31 + 2.17 + 0.95}{4} - \frac{0.92 + 1.38 + 0.73 + 1.37}{4} = \underline{0.40}$$

b)

$$I = ABCD \Rightarrow \begin{cases} \hat{CD} = \hat{AB} = 0.40 \\ \hat{BD} = \hat{AC} = -0.11 \\ \hat{BC} = \hat{AD} = -0.01 \\ \hat{BCD} = \hat{A} = 1.145 \\ \hat{ACD} = \hat{B} = 0.60 \\ \hat{ABD} = \hat{C} = 0.31 \\ \hat{ABC} = \hat{D} = 0.22 \end{cases}$$

I de 2 faktorene A og B er de 4 nivå-kombinasjonene

(--), (-+), (+-) og (++) gjentatt 2 ganger.

$$\hat{\sigma}_{y\hat{b}}^2 = \frac{\hat{C}^2 + \hat{D}^2 + \hat{AC}^2 + \hat{AD}^2}{4} = \frac{0.31^2 + 0.22^2 + 0.11^2 + 0.01^2}{4} = 0.039$$

Kritisk verdi for effektene er  $t_{0.025, 4} \cdot \sqrt{0.039} = 2.776 \cdot \sqrt{0.039} \approx 0.55$

$\Rightarrow$  A og B er signifikante på 5% nivå.

c) Estimeret forandring; forventet respons ved  $\alpha^0$  bruke  
modifisert hull istedenfor standard-hull er 1.145

Estimeret forandring; forventet respons ved  $\alpha^1$  bruke  
modifisert hull istedenfor standard hull er 0.60.

For forsøke 1-4 er BC +. For forsøke 5-8 er BC -

Forsøket er blokkdelte etter BC sampelet. Sidan  $I = ABCD$

og AD konfundert med blokkeffekten.

Estimat for effektene er utforandret.

$$Ny \hat{\sigma}_{eff}^2 = \frac{\hat{C}^2 + \hat{D}^2 + \hat{AC}^2}{3} = \frac{0.31^2 + 0.22^2 + 0.11^2}{3} = 0.052$$

$$\text{kritisk verdi for effektene er } 3.182 \sqrt{0.052} \approx 0.727$$

$\Rightarrow$  bare A er signifikant.

## Oppgave 2

a) La  $\mu_M$  = forventet tapt arbeidstid med  
sikkerhetsprogram

$\mu_u$  = forventet tapt arbeidstid uten sikkerhetsprogram

$$H_0: \mu_M = \mu_u, \quad H_1: \mu_M < \mu_u$$

La  $X_i$ , være registrert tapt arbeidstid i bedrift nr.  $i$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, 5$  med sikkerhetsprogram

og  $Y_i$  være registrert tapt arbeidstid i bedrift nr.  $i = 1, 2, \dots, 5$   
uten sikkerhetsprogram



$$\bar{T}_1 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}}$$

$$\text{der } \sigma_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^5 (Y_i - \bar{Y})^2}{8}$$

$$\bar{T}_2 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{5} + \frac{s_y^2}{5}}} = \bar{T}_1$$

$$\text{der } s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2}{4}, \quad s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (Y_i - \bar{Y})^2}{4}$$

Første testen foreslået

$X_i \sim N(\mu_M, \sigma^2)$  og uafh.,  $i=1, 2, \dots, 5$

●  $Y_i \sim N(\mu_U, \sigma^2)$ , uafh.  $i=1, 2, \dots, 5$  og uafh. af  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 5$

Anden test foreslået

$X_i \sim N(\mu_M, \sigma_x^2)$  og uafh.,  $i=1, 2, \dots, 5$

$Y_i \sim N(\mu_U, \sigma_y^2)$ , uafh.  $i=1, 2, \dots, 5$  og uafh. af  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 5$

Sidan  $\sigma_y^2$  er over 4 gange så stor som  $\sigma_x^2$  bør en brude test nr. 2.

● For begge testene er p-værdien mindre end 0.05  $\Rightarrow$  forkast  $H_0$  og påstå at sikkerhedsprogrammet har effekt på 5% niveau.

$$H_0: \tilde{\mu}_M = \tilde{\mu}_U, \quad H_1: \tilde{\mu}_M < \tilde{\mu}_U$$

b) Ordre efter algebriske størrelse

Y X X X X Y X Y Y Y  
31, 35, 40, 44, 71, 72, 73, 129, 169, 178

Rang: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$W_x = 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 21, \quad W_{min} = 15$$

$\Rightarrow U = 6$ . Kritisk værdi = 4  $\Rightarrow$  ikke forkast.

Wilcoxon to-utvalgs test krever lik fordeling i  
 dei to utvala, bortsett frå beliggendat. Sidan variansen  
 i det eine utvalet synes å vere mykje større enn i  
 det andre er det grunn til å stole mest på test nr.  
 2: a).

c)  
 Konstant  $\hat{\beta}_0 = \frac{31.67}{8.56} = 3.70$

Filsette  $\hat{\beta}_1 = \frac{0.014272}{11.68} = 0.001222$

Sikkerhetsprogram  $\hat{\beta}_2 = 6.316 \cdot -9.22 = -58.223$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$        $H_1: \text{Minst ein av } \beta_1 \text{ og } \beta_2 \text{ er } \neq 0$

$$F_{obs} = \frac{\frac{SSR}{2}}{\frac{SSE}{37}} = \frac{\frac{900.58}{2}}{\frac{14752}{37}} = 112.94$$

$P(F_{2, 37} \geq 112.94) = 0.000 \dots < 0.05 \Rightarrow$  modellen har  
 signifikant forklaringsgrad.

$R^2 = 0.859$  : 85.9% av variasjonen i dataene er forklart.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i})^2}{40 - 3}$$

$$s^2 = 19.87^2 \approx 395$$

$t_i = \frac{0.39}{\sqrt{395(1 - h_{39})}}$ , der  $h_{39} = y_{39} - b_0 - b_1 x_{1,39} - b_2 x_{2,39}$ ,  $s^2$  er estimat for  
 $\sigma^2$  der  $(y_{39}, x_{1,39}$  og  $x_{2,39})$  er kjerne bort.

(5)

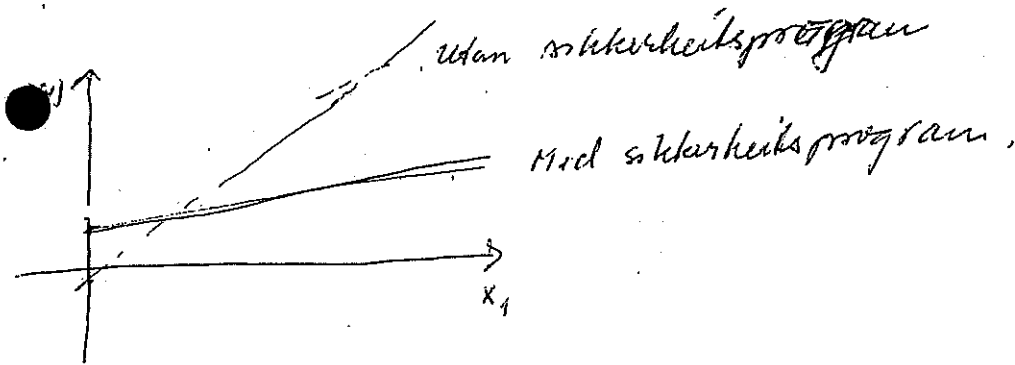
$k=9$  or  $39$  diagonalelement  $= \frac{X(X'X)^{-1}X'Y}{n}$

d)  $E[Y] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2$

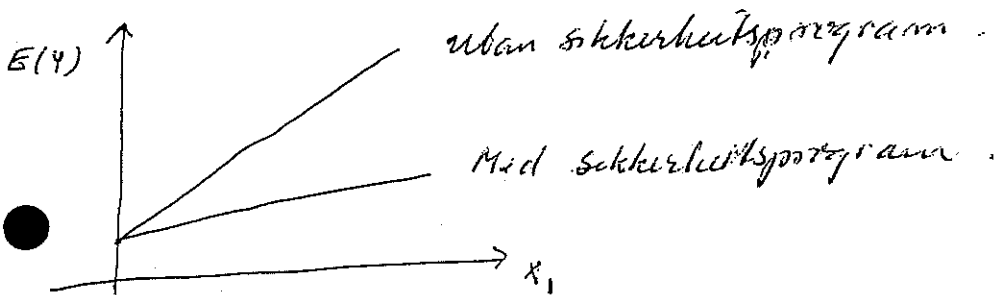
$T_i = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{SD(\hat{\beta}_i)}}$ ,  $T_{obs} = 0.48$ ,  $P(T_{36} > 0.48) = 0.631$

$\Rightarrow x_2$  has ikke signifikant forklaringsgrad.

$x_2$  med.



$x_2$  ikke med.



$$R^2 = \frac{97749 - 46}{104811} = 0.932$$

$$S^2 = \frac{7062 + 46}{37} = 192.108$$

$$\text{Mallows. } Cp = 3 + \frac{(5 - 3) S^2}{\hat{\sigma}^2} = 2.23$$

### Oppgave 3

(6)

Randomisert blokkdesign.

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \alpha_j + \epsilon_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} N(\mu, \sigma^2) \\ \mu \text{ ukent} \end{array} \right. ; \quad i = 1, 2, \dots, 5 \\ j = 1, 2, \dots, 5$$

$\beta_i$  → Blokk-effekt nr. i  
 $\alpha_j$  → måler-effekt nr. j

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$  ,  $H_1: \text{minst en} \neq 0$

$$SS_M = \sum_i \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

$$SS_E = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{..})^2$$

$$F_{0.05} = \frac{\frac{SS_M}{4}}{\frac{SS_E}{56}} = \frac{\frac{0.20219}{4}}{\frac{0.26981}{56}} = 10.49$$

$P(F_{4, 56} \geq 10.49) = 0.000 \dots \Rightarrow$  signifikant på alle

● Signifikans målt.