Bokmål tekst

Faglig kontakt under eksamen:
John Tyssedal, telefon 73593534

Eksamen i fag SIF 5066 Anvendt statistikk

Mandag 28. mai 2001
Tid: 09.00-13.00

Hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Tapir: Formler og tabeller i statistikk/Statistiske tabeller og formler
Et gult ark med egne notatar.

Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1.

En bedrift har problemer med sprekkdannelser i produksjonen av stålfjærer. I en testperiode på 20 dager testet de daglig de 200 først produserte fjærene og prosentvis antall fjærer uten sprekkdannelser ble notert.

`65 65 70 75 68 72 66 66 73 77 71 70 64 69 72 73 66 68 73 77`

Gjennomsnittet av disse 20 tallene er 70.

a) La X_i, være antall fjærer med sprekkdannelser på dag i, $i = 1,2,\ldots,20$. Under hvilke forutsetninger vil hver X_i, $i = 1,2,\ldots,20$ være binomisk fordelt. Konstruer så et kontrollkort for denne produksjonsprosessen basert på dataene ovenfor. Plott inn de 10 siste observasjonene. Ser prosessen ut til å være i kontroll?

I resten av oppgaven kan de anta at daglig testing av 200 fjærer ligger til grunn for rapporteringen.
Bedriften syntes at tallet på fjærer uten sprekkdannelser var for lavt. De hadde sterk mistanke om at temperaturen på oljen som de brukte til å kjøle ned fjærene kunne ha noe å si for sprekkdannelsene. Det ble derfor satt i gang forsøk for å undersøke dette. I 4 dager gikk produksjonen med en kjøletemperatur på $20^\circ C$ og i 4 dagar med en

kjøletemperatur på $50^{\circ}C$. Prosentvis antall fjærer uten sprekkdannelser for de to tilfellene er gitt nedenfor.

$20^{\circ}C$	68 72 73 67
$50^{\circ}C$	74 68 73 69

b) Hvorfor er det naturlig å anta at dataane ovenfor kan tilnærmes med en normalfordeling?
De vil undersøke om det er forskjell i sprekkdannelser ved de to temperaturene. Utskrift fra en analyse med MINITAB er gitt nedenfor.

Two Sample T-Test and Confidence Interval

```
Two sample T for sprekk20 vs sprekk50

          N      Mean     StDev   SE Mean
sprekk20  4     70.00      2.94       1.5
sprekk50  4     71.25      3.30       1.7

95% CI for mu sprekk20 - mu sprekk50: ( -6.7,  4.2)
T-Test mu sprekk20 = mu sprekk50 (vs not =): T = -0.56  P = 0.59  DF = 6
Both use Pooled StDev = 3.13
```

Formuler hypotesetesten. Hvike forutsetninger om dataene bygger en slik test på? Sett opp utrykket for testobservator. Hva blir konklusjonen når signifikansnivået er 5%? Grunngi svaret.

Det ble hevdet at andre faktorer som temperaturen i stålet og tilsetning av karbon også kunne påvirke sprekkdannelser. De bestemte seg derfor for å utføre et flerfaktor forsøk. Siden flere mente at temperaturen i kjøleoljen måtte ha noe å si, ble også denne faktoren tatt med. De tre faktorene med valgte nivåer er gitt nedenfor.

	-	+
A: Stål temperatur	$780^{\circ}C$	$880^{\circ}C$
B: Tilsetning av karbon	0.5%	0.7%
C: Olje temperatur	$20^{\circ}C$	$50^{\circ}C$

Det ble bestemt at en først skulle gjøre de 4 enkeltforsøkene nedenfor. Responsen er fortsatt målt i prosentvis stålfjærer uten sprekkdannelser.

A	B	C	% sprekkfrie fjærer
-1	-1	1	59
1	-1	-1	79
-1	1	-1	61
1	1	1	87

c) Hva slags forsøk er dette? Hva blir definerende relasjon for dette forsøket? Finn ut hvordan effektene er konfunderte og regn ut estimatet for de 3 effektene.

De bestemte så å utvide forsøket med de 4 enkeltforsøkene nedenfor.

A	B	C	% sprekkfrie fjærer
-1	-1	-1	67
1	-1	1	90
-1	1	1	52
1	1	-1	75

d) Resultatet fra analysen av disse 4 enkeltforsøkene ble:

```
Term          Effect      Coef
Constant                  71.000
  A           23.000      11.500
  B          -15.000      -7.500
  C           -0.000      -0.000
```

Bruk dette til å finne estimater for hovedeffektene av faktorene A, B og C og samspillet mellom faktorene A og C basert på alle de 8 forsøkene.

For betre å kunne vurdere hvilke effekter som er signifikante bestemte de seg for å gjøre et gjentak av forsøket. Det nye forsøket ble gjort etter det samme oppsettet som det første, det vil si som to fraksjonerte forsøk hver bestående av 4 enkeltforsøk og der samme generator (definerende kontrast) ligger til grunn for fraksjoneringen. Således ble hele forsøket egentlig utført i 4 blokker hver på 4 enkeltforsøk. Deler av en analyse med MINITAB er gitt nedenfor.

Fractional Factorial Fit

```
Estimated Effects and Coefficients for %sprekkfrie(coded units)

Term          Effect      Coef
Constant                  70.875
Block   1                  0.125
        2                  0.625
        3                 -1.375
A             22.250      11.125
B             -6.000      -3.000
C              2.500       1.250
A*B            1.000       0.500
A*C           11.000       5.500
B*C           -1.750      -0.875
```

```
Analysis of Variance for C5 (coded units)

Source               DF     Seq SS      Adj MS       F       P
Blocks                3      10.75       3.583     0.78   0.546
Main Effects          3    2149.25     716.417   156.31   0.000
2-Way Interactions    3     500.25     166.750    36.38   0.000
Residual Error        6      27.50       4.583
Total                15    2687.75
```

e) Finn variansen til effektene uttrykt ved variansen til enkeltobservasjonene og finn ut hvilke effekter som er signifikante på 5% nivå. Tolk resultatet av estimeringen.

Analysen av forsøket ovenfor kan også gjøres med vanlig regresjonsanalyse. Ved innlesing av dataene ble verdiene for respons og faktorer analysert i 1d) lagt først, deretter verdiene analysert i 1c) og så verdiene i gjentaket etter samme mønster. For å trekke ut variasjonen forårsaket av eventuelle blokkeffekter ble det i designmatrisen lagt til 3 nye forklaringsvariabler, Bl2, Bl3 og Bl4 med kolonneverdier som gitt nedenfor.

Bl2 = (0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0)'
Bl3 = (0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0)'
Bl4 = (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1)'

Analysen med MINITAB gav som resultat:

Regression Analysis

```
The regression equation is
%sprekkfrie = 71.0 + 11.1 A - 3.00 B + 1.25 C + 0.500 A*B + 5.50 A*C -
0.875 B*C + 0.50 Bl2 - 1.50 Bl3 + 0.50 Bl4

Predictor        Coef      StDev        T        P
Constant       71.000      1.070    66.33    0.000
A             11.1250     0.5352    20.79    0.000
B             -3.0000     0.5352    -5.61    0.001
C              1.2500     0.5352     2.34    0.058
A*B            0.5000     0.5352     0.93    0.386
A*C            5.5000     0.5352    10.28    0.000
B*C           -0.8750     0.5352    -1.63    0.153
Bl2             0.500      1.514     0.33    0.752
Bl3            -1.500      1.514    -0.99    0.360
Bl4             0.500      1.514     0.33    0.752

S = 2.141         R-Sq = 99.0%      R-Sq(adj) = 97.4%
```

```
Analysis of Variance

Source              DF        SS        MS        F        P
Regression           9   2660.25    295.58    64.49    0.000
Residual Error       6     27.50      4.58
Total               15   2687.75

Source      DF      Seq SS
A            1     1980.25
B            1      144.00
C            1       25.00
A*B          1        4.00
A*C          1      484.00
B*C          1       12.25
B12          1        2.08
B13          1        8.17
B14          1        0.50
```

f) Forklar utifra utskriften hvorfor gjennomsnittet av responsverdiene i de 4 blokkene er 71.0, 71.5, 69.5 og 71.5. Bruk dette til å rekne ut kvadratsummen for blokker og test om en modell som kun består av et konstantledd, de tre hovedeffektene av A, B og C og tofaktorsamspillene mellom disse faktorene forklarer en signifikant del av variasjonen i dataene. (Det er tenkt at de skal la variasjonen mellom blokker inngå i feilen.) Hva blir R^2 for en slik modell?

g) De bestemmer seg for å se bort frå blokkeffekten, og vil tilpasse en modell der kun konstantleddet, hovedeffekten av A og B og samspillet AC inngår.
Hva blir den tilpassete modellen? Hva blir R^2 for denne modellen?
Konstruer et 95% prediksjonsintervall for prosentvis antall stålfjærer uten sprekkdannelser når faktorene A og C er på høyt nivå (+) og faktor B er på lavt nivå (-) basert på denne modellen.

Oppgave 2

Fire tilfeldig valgte laboratorier som vi skal kalle A, B, C og D, ble plukket ut til å være med i et forsøk for å teste kvaliteten av en bestemt type ost. Målet med forsøket var å detektere kilder til variasjon i kvalitetsrapporteringen av osten, spesielt om variasjonen mellom laboratorier er et problem. En ost blei delt opp i 4 biter og hvert laboratorium får tilsendt en ostebit og bedt om å levere 5 kvalitetsvurderinger av denne. Resultatet av forsøket er synt i tabellen nedenfor.

A	B	C	D
16.0	17.0	16.9	15.0
17.1	17.3	16.1	15.9
16.9	16.2	16.4	16.0
17.2	17.1	16.1	15.9
17.0	16.0	16.6	16.2

En analyse med MINITAB gav følgende utskrift.

General Linear Model

```
Factor     Type   Levels  Values
Lab       random    4     1 2 3 4

Analysis of Variance for C1, using Adjusted SS for Tests

Source     DF     Seq SS     Adj SS     Adj MS      F      P
Lab         3     3.2415     3.2415     1.0805    4.79  0.014
Error      16     3.6080     3.6080     0.2255
Total      19     6.8495

Expected Mean Squares, using Adjusted SS

Source       Expected Mean Square for Each Term
 1 Lab       (2) +  5.0000(1)
 2 Error     (2)
```

Sett opp en modell for dette forsøket og gjør rede for hvilke forutsetninger vi gjør for analysen. Er det grunnlag for å påstå at det er forskjeller mellom laboratoriene? Bruk 5% signifikansnivå. Estimer varianskomponentene.

Løysingsforslag SIF 5066 Anvendt statistikk

Oppgåve 1

X_i binomisk fordelt dersom

- 200 uavhengige forsøk
- Observerer fjører med sprekk / ikkje sprekk
- P(sprekk) = p for kvar fjør.

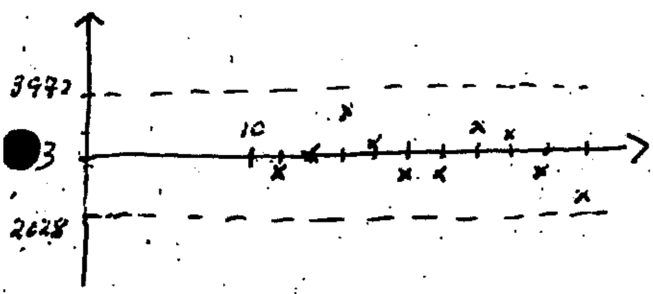
$X_i \sim B(200, p) \Rightarrow Y_i$ (talet på fjører utan sprekk) er $B(200, 1-p)$

$SD(X_i) = SD(Y_i) = np(1-p) = 200 \cdot p(1-p)$

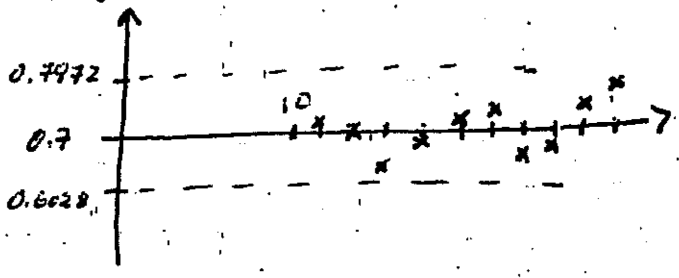
$1-\hat{p} = 0.7 \Rightarrow \hat{p} = 0.3$ og $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \hat{\sigma}_{1-\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{200}} = 0.0324$

$\hat{p} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{p}} \Rightarrow \begin{cases} UCL = 0.3972 \\ LCL = 0.2028 \end{cases}$

For X_i



Evt. for Y_i



$\min(n\hat{p}, n(1-\hat{p})) = 200 \cdot 0.3 = 60 >> 5 \Rightarrow$ binomisk fordeling kan approksimerast med normalfordeling.

$H_0 : \mu_{20} = \mu_{50}$ $\quad H_1 : \mu_{20} \neq \mu_{50}$

20°C $\quad X_i,\ i = 1, 2, \ldots 4 \sim N(\mu_{20}, \sigma^2)$ og uavh.

50°C $\quad Y_i,\ i = 1, 2, \ldots 4 \sim N(\mu_{50}, \sigma^2)$ og uavh. og uavh. av $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, 4$.

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} \quad \text{der} \quad s_p = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}(y_i - \bar{y})^2}{6}$$

verdi = 0.59 gjer ingen grunn til å forkaste.

?) 2^{3-1}_{III} forsøk, $I = ABC$

$A = A + BC$
$B = B + AC$
$C = C + AB$

$$l_A = \frac{79 + 87 - (59 + 61)}{2} = 23$$

$$l_B = \frac{87 + 61 - (79 + 59)}{2} = 5$$

$$l_C = \frac{59 + 87 - (61 + 79)}{2} = 3$$

!) $$\hat{A} = \frac{l_A + l_A'}{2} = \frac{23 + 23}{2} = 23$$

$$\hat{B} = \frac{l_B + l_B'}{2} = \frac{5 - 15}{2} = -5$$

$$\hat{C} = \frac{l_C + l_C'}{2} = \frac{3 + 0}{2} = 1.5$$

$$\hat{AC} = \frac{l_B - l_B'}{2} = \frac{5 + 15}{2} = 10$$

e) $$\sigma^2_{eff.} = \frac{4\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{4}, \quad \hat{\sigma}^2_{eff} = \frac{4.583}{4} = 1.146$$

Kritisk verdi $= \sqrt{1.146} \cdot t_{0.025, 6} = \sqrt{1.146} \cdot 2.45 = 2.62$.

$\Rightarrow$ A, B og AC er signifikante.

reduksjon av karbon frå 0.7% til 0.5% kjem
n estimert forventa auke i % feilfrie fjører med 6.
Det er samspel mellom A og C. Vi har ikkje alle
observasjonane oppgitt, men røft sett er

$$\hat{y} = 70.875 + \frac{22.25}{2}A - \frac{6}{2}B + \frac{11}{2}AC.$$

$\Rightarrow$ effekten av faktor A og C $\approx$ $11.125A + 5.5AC$

C \ A	−	+
−	−5.625	5.625
+	−16.625	16.625

Som synes at effekten av å auke ståltemperaturen er mykje større når olje-temperaturen er 50°C enn når den er 20. Best effekt får vi A og C er på høg / nivå.

f) Sidan blokkdelinga er ortogonal på kontrastkolonnene (like mange + og − i kvar blokk) vil alle effektar bli kansellert når vi midlar dei 4 observasjonane i kvar blokk

difor er $\overline{Blokk\,1} = 71$, $\overline{Blokk\,2} = 71 + 0.5 = 71.5$

$\overline{Blokk\,3} = 71 - 1.5 = 69.5$, $\overline{Blokk\,4} = 71 + 0.5 = 71.5$

$\bar{y} = 70.875$

$$SS_{Blokk} = 4\left[(71-70.875)^2 + (71.5-70.875)^2 + (69.5-70.875)^2 + (71.5-70.875)^2\right]$$

$= 10.75.$

$H_0: \beta_A = \beta_B = \beta_C = \beta_{AB} = \beta_{BC} = \beta_{AC} = 0$ $\qquad H_1:$ minst ein $\neq 0$.

$SS_R = 2660.25 - 10.75 = 2649.50$

$$F = \frac{\frac{SS_R}{6}}{\frac{SS_E}{9}} = \frac{\frac{2649.50}{6}}{\frac{38.25}{9}} = 103.9 \quad >> f_{0.05,6,9} = 3.37$$

=> forkast H_0. Regresjonen har signifikant forklaringsgrad

$$R^2 = \frac{2649.50}{2687.50} = 98.6$$

)

$$\hat{Y} = \bar{Y} + \beta_A A + \beta_B B + \beta_{AC} AC$$

$$= 70.875 + 11.125 A - 3 B + 5.5 AC.$$

$$R^2 = \frac{1980.25 + 144 + 484}{2687.25} = \frac{2608.25}{2687.25} = 97.$$

$$\hat{Y} = 70.875 + 11.125 + 3 + 5.5 = 90.5.$$

$$s^2 = \frac{2687.25 - 2608.25}{12} = \frac{79.5}{12} = 6.62$$

$$\underset{(1,0,1,1)}{\mathrm{Var}\,\hat{Y}} = \mathrm{Var}(\bar{Y} + \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_A + \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_B + \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_{AC})$$

$$= \frac{\sigma^2}{16} + \frac{\sigma^2}{16} + \frac{\sigma^2}{16} + \frac{\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{4}$$

$$\mathrm{Var}(Y - \hat{Y}) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} = \frac{5\sigma^2}{4}$$

Prediksjonsintervall: $90.5 \pm t_{0.025,12} \cdot s\sqrt{\frac{5}{4}} = 90.5 \pm 6.27$

$$= (84.23, 96.77)$$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \sim \text{uavh}$$

$$\alpha_j \sim N(0, \sigma_A^2)$$

$H_0: \sigma_A^2 = 0 \qquad H_1: \sigma_A^2 \neq 0.$

P-verdien $= P(F_{3,16} \geq 4.79) = 0.014$

$\Rightarrow$ forkast H_0 på 5% nivå

$$E\left[\frac{SS_L}{3}\right] = \sigma^2 + 5\sigma_A^2$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_A^2 = \frac{E\left[\frac{SS_L}{3}\right] - \hat{\sigma}^2}{5} = \frac{1.0805 - 0.2255}{5} = 0.171$$