

NTNU
Noregs teknisk-naturvitskaplege
universitet

Fakultet for informasjonsteknologi,
matematikk og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen
John Tyssedal tlf. 73593534

**EKSAMEN I EMNE TMA4255 FORSØKSPLANLEGGING OG ANVENDTE
STATISTISKE METODER**

9 august 2004
Tid: 09.00 – 14.00

Hjelpemiddel: Alle trykte og håndskrevne hjelpemiddel er tillatte. Bestemt enkel kalkulator tillatt.

Sensuren faller 1. september

Oppgave 1.

For wire som skal brukes til en viss type kraner har det betydning at slitestyrken er så stor som mulig. En vil derfor undersøke om wire fra fabrikk A som hittil har vært brukt har lavere slitestyrke enn wire fra en ny fabrikk B. For å undersøke dette har en tilfeldig valgt ut 7 prøver fra A, kjørt prøvene på en slitasjemaskin og målt levetiden (X_i), det vil si tiden inntil wiren brister i timer.

Resultatene ble: 4.5 2.2 6.6 3.8 7.9 3.0 1.8

For 8 prøver som ble valgt ut tilfeldig fra B var levetiden (Y_j), målt i timer:

7.0 5.9 5.1 8.4 7.2 2.7 7.5 8.2.

En vil undersøke om det er grunn til å anta at wire fra A gjennomgående har kortere levetid enn wire fra B.

a) Formuler dette som et hypotesetestingsproblem. En analyse utført med MINITAB er synt nedenfor:

Two-Sample T-Test and CI: A; B

Two-sample T for A vs B

	N	Mean	StDev	SE Mean
A	7	4,26	2,27	0,86
B	8	6,50	1,89	0,67

Difference = μ A - μ B

Estimate for difference: -2,24

95% upper bound for difference: -0,34

T-Test of difference = 0 (vs <): T-Value = -2,09 P-Value = 0,028 DF = 13

Both use Pooled StDev = 2,07

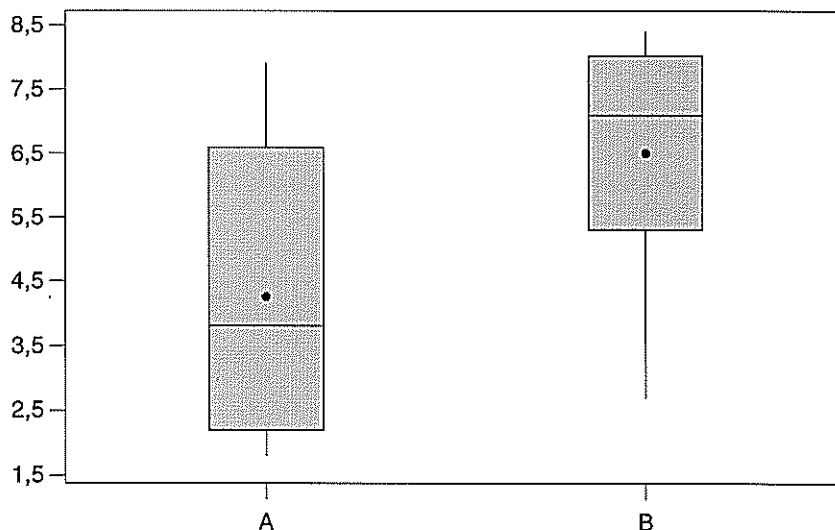
Hvilke antagelser er en s nn test basert på? Sett opp uttrykket for testobservatoren. Forklar hva P-verdien betyr her og gi konklusjonen på testen. Bruk 5% signifikansnivå.

Testen ovenfor kan også utføres ved hjelp av en Wilcoxon t utvalgstest (Mann-Whitney test).

b) Utfør testen. Hva blir nå konklusjonen n r signifikansnivået er som i 1a)? Studer boxplottet nedenfor og vurder om det er noen grunn til å velge den ene testen fremfor den andre.

Boxplots of A and B

(means are indicated by solid circles)



Oppgave 2.

En person kan velge mellom 4 alternative ruter når han skal kjøre på jobb. For å få informasjon om forventet tidsforbruk noterer han tiden han bruker om morgenen hver dag i 4 uker slik at han for hver arbeidsdag får en observasjon for hver rute. For hver dag f. eks. mandag er rekkefølgen de 4 rutene er kjørt i, tilfeldig trukket. De observerte tallene er gitt i tabellen nedenfor:

Tabell 1					
Dag\Rute	Rute 1	Rute 2	Rute 3	Rute 4	Gj. snitt
Mandag	22	25	26	26	24.75
Tirsdag	26	27	29	28	27.50
Onsdag	25	28	33	27	28.25
Torsdag	25	26	30	30	27.75
Fredag	31	29	33	30	30.75
Gj. snitt	25.8	27	30.2	28.2	27.80

Det ble valgt å gjøre en toveis variansanalyse på dataene. Utskrift av en analyse med MINITAB følger nedenfor:

Two-way ANOVA: Tid versus dag; rute

Analysis of Variance for tid					
Source	DF	SS	MS	F	P
dag	4	73,20	18,30	8,07	0,002
rute	3	52,80	17,60	7,76	0,004
Error	12	27,20	2,27		
Total	19	153,20			

- Forklar hvorfor det er rimelig at dag effekten i dette tilfellet blir en blokkeffekt. Hvilket forsøksoppsett kan en si er blitt utført her? Sett opp modell og gjør rede for hvilke forutsetninger analysen ovenfor er basert på. Formuler nullhypotese og alternativ hypotese. Hvilke konklusjoner kan en trekke ut i fra forsøket? Bruk 5% signifikansnivå.
- Personen var interessert i å finne ut hvilke ruter som signifikant skilte seg fra de andre. Foreta en test for å finne ut dette.

Oppgave 3.

Når sement størkner blir det avgitt varme til omgivelsene. For å undersøke hvordan mengden av fire kjemiske forbindelser x_1, x_2, x_3 og x_4 som inngår i sementen påvirker avgitt varme y (kalorier pr. gram) ble det gjort 13 målinger som vist i tabellen på neste side.

Obs	y	x_1	x_2	x_3	x_4
1	78,5	7	26	6	60
2	74,3	1	29	15	52
3	104,3	11	56	8	20
4	87,6	11	31	8	47
5	95,9	7	52	6	33
6	109,2	11	55	9	22
7	102,7	3	71	17	6
8	72,5	1	31	22	44
9	93,1	2	54	18	22
10	115,9	21	47	4	26
11	83,8	1	40	23	34
12	113,3	11	66	9	12
13	109,4	10	68	8	12

Nedenfor er det synt utskrift av korrelasjonsmatrisen til de fire regresjonsvariablene.

Correlations: x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4

	x_1	x_2	x_3
x_2	0,229		
x_3	-0,824	-0,139	
x_4	-0,245	-0,973	0,030

- a) Har denne korrelasjonsmatrisen egenskaper som kan være til ulempe når vi skal ta med flere enn en regresjonsvariabel i modellen? Grunngi svaret.
En regresjonsanalyse med MINITAB er synt nedenfor.

Regression Analysis: varme versus x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4

The regression equation is

$$\text{varme} = 62,4 + 1,55 x_1 + 0,510 x_2 + 0,102 x_3 - 0,144 x_4$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	62,41	70,07	0,89	0,399
x_1	1,5511	0,7448	2,08	0,071
x_2	0,5102	0,7238	0,70	0,501
x_3	0,1019	0,7547	0,14	0,896
x_4	-0,1441	0,7091	-0,20	0,844

S = 2,446

PRESS = 110,347

Analysis of Variance

R-Sq = 98,2%

R-Sq(adj) = 97,4%

R-Sq(pred) = 95,94%

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	2667,90	666,97	111,48	0,000
Residual Error	8	47,86	5,98		
Total	12	2715,76			

Source	DF	Seq SS
x_1	1	1450,08
x_2	1	1207,78
x_3	1	9,79
x_4	1	0,25

Hvor mye av variasjonen i dataene er forklart med denne modellen? Har regresjonen signifikant forklaringsgrad? Er noen av forklaringsvariablene signifikante gitt at de andre er med i modellen? (I besvarelsen av de 2 siste spørsmålene skal det oppgis hvilke hypoteser som blir testet og svarene skal grunngis. Du kan velge signifikansnivå selv)

En ny regresjonsanalyse hvor bare x_1 og x_2 er tatt med ble så utført. Utskriften er synt nedenfor.

The regression equation is

$$\text{varme} = 52,6 + 1,47 x_1 + 0,662 x_2$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	52,577	2,286	23,00	0,000
x_1	1,4683	0,1213	12,10	0,000
x_2	0,66225	0,04585	14,44	0,000

S = 2,406
PRESS = 93,8825
R-Sq = 97,9%
R-Sq(pred) = 96,54%
R-Sq(adj) = 97,4%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	2657,9	1328,9	229,50	0,000
Residual Error	10	57,9	5,8		
Total	12	2715,8			

Source	DF	Seq SS
x_1	1	1450,1
x_2	1	1207,8

- b) Sammenlign de ulike kriteriene for variabelutvelgelse for de to modellene i 3a) og 3b) Hvilken av modellene ville du valgt?
Beregn Mallows C_p for de to modellene.

Oppgave 4

- a) I et 2^{5-2} forsøk i variablene A, B, C, D og E er $D=AB$ og $E=-AC$. Finn definerende relasjon og hvilke tofaktorsamspill som er konfunderte med hovedeffektene. Hvilken resolusjon har forsøket?
- b) Vis hvordan det er mulig å utføre et annet 2^{5-2} forsøk på en slik måte at hovedeffektene kan estimeres ukonfundert med tofaktorsamspillene når en bruker begge fraksjonene. Anta at samspillene av orden høyere enn to kan neglisjeres. Da er det mulig å estimere 4 ukonfunderte tofaktorsamspill med de to fraksjonene. Finn disse 4 tofaktorsamspillene. De to fraksjonene kan også benyttes til å konstruere en halvfraksjon av et 2^5 forsøk. Hvilken definerende relasjon får denne halvfraksjonen?

①

Løsningsforslag TMA 4255/TMA 4260 09.08.04

$$a) E[X_i] = \mu_A, \forall i$$

$$E[Y_i] = \mu_B, \forall i$$

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A < \mu_B$$

$X_1, \dots, X_7 \sim N(\mu_A, \sigma^2)$ og uavh

$Y_1, \dots, Y_8 \sim N(\mu_B, \sigma^2)$, uavh og uavh av X_1, \dots, X_7 .

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}}, \quad S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^8 (Y_i - \bar{Y})^2}{13}$$

$$P\text{-verdi} = P(T \leq -2.09)$$

$$P\text{-verdi} = 0.028 < 0.05 \Rightarrow \text{forkast } H_0$$

b) dersom $F_X(\cdot)$ og $F_Y(\cdot)$ har samme form:

$$H_0: \tilde{\mu}_A = \tilde{\mu}_B$$

$$H_1: \tilde{\mu}_A < \tilde{\mu}_B$$

Rangering: 1.8 2.2 2.7 3.0 3.8 4.5 5.1 5.9 6.6 7.0 7.2 7.5 7.9 8.2 8.4

Rang : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Type : A A B A A A B B A B B B A B B

$$W_A = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 9 + 13 = 40$$

$$W_{A, \min} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

$$U_A = 40 - 28 = 12 < 13 = U_{kritisk} \Rightarrow \text{forkast } H_0$$

(2)

Boxplotet viser ingen avvikende observasjoner, men indikerer at fordelingene kanskje ikke har samme form. Vi har dermed ikke kvaldepunktet for å ~~test~~ velge Wilcoxon test framfor t-testen.

Oppgave 2

Det er grunn til å tro at køyre tid for ei rute er avhengig av hva dag ein køyrer og at køyreforholda innanfor ein dag er meir homogene enn køyreforholda mellom dagar. Derfor er det rimelig å ha dag som ein blokkvariabel.

Forsøket er utført som eit fullstendig randomisert blokkforsøk.

$$Y_{ij} = \mu + d_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \begin{cases} N(0, \sigma^2) \\ \text{uavh.} \end{cases} \begin{matrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{matrix}$$

\swarrow ruteeffekt \searrow dageffekt

$$H_0: d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$$

$$H_1: \text{minst ein} \neq 0$$

$$P = 0.004 < 0.05 \Rightarrow \text{forkast } H_0$$

b) Ved bruk av Bonferroni er $t_{\frac{0.025}{6}, 12} \approx t_{0.005} = 3.06$

Ved bruk av LSD er $t_{0.025, 12} = 2.16$

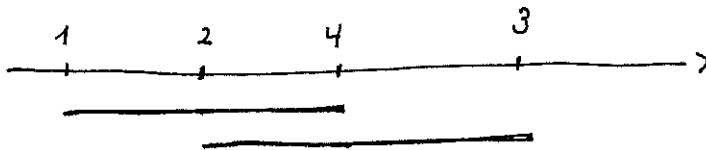
(3)

Resoluttverdien av gjennomsnittsdifferansene skal derfor sammenliknes med:

Bonferroni $3.06 \cdot 2.27 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = 4.39$

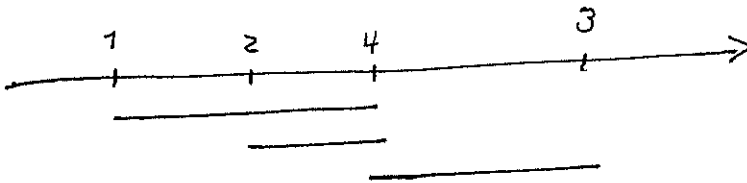
LSD $2.16 \cdot 2.27 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = 3.1$

Bonferroni



Rute 1 og 3 skill seg signifikant i reise tid.

LSD:



Her skill Rute 2 og 3 seg signifikant og.

3a)

X_1 og X_3 og X_2 og X_4 er sterkt negativt korrelerte

Dette gir stor varians i estimering av koeffisienter og indikerer potensiell multikollinearitet.

$R^2 = 98.2$

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ $H_1: \text{minst en} \neq 0$

$F = 111.48$ med tilhørende $P = 0.000 \Rightarrow$ regresjonen

har signifikant forklaringsgrad.

(4)

P-verdierne for t -testene er alle større enn 0,05 slik at ingen av forklaringsvariabelene er signifikante på 5% nivå. X_1 er signifikant på 10% nivå.

b)

	Modell 3a	Modell 3b
S	2.446	2.406
R^2	98.2	97.9
(y)	97.4	97.4
Prors	110.347	93.8825
R^2_{pred}	95.94	96.54

R^2_{adj} er lik for begge (skuddast nok avrundingsfeil), men S, Prors og R^2_{pred} favoriserer modellen i 3b

Med kun to variable som begge er signifikante gitt at den andre er med er modellen i 3b å foretrekke.

$$C_p = p + \frac{(s^2 - \hat{\sigma}^2)(n-p)}{\hat{\sigma}^2}$$

$$C_{p, 3a} = 5 + \frac{(5.98 - 5.98)(13-5)}{5.98} = 5$$

$$C_{p, 3b} = 5 + \frac{(5.8 - 5.98)(13-3)}{5.98} \approx 4.7$$

(5)

4a)

$$\left. \begin{array}{l} D = AB \\ E = -AC \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{I} = ABD = -ACE \\ \hat{I}^2 = -BCDE \end{array}$$

$$L_A \rightarrow A + BD - CE$$

$$L_B \rightarrow B + AD$$

$$L_C \rightarrow C - AE$$

$$L_D \rightarrow D + AB$$

$$L_E \rightarrow E - AC$$

Sidan tofaktor samspel är konfunderade med huvudeffekterna
har försöket resolution 3.

4b)

$$\left. \begin{array}{l} D = -AB \\ E = AC \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{I} = -ABD = ACE \\ \hat{I}^2 = -BCDE \end{array}$$

$$L_A' \rightarrow A - BD + CE$$

$$L_B' \rightarrow B - AD$$

$$L_C' \rightarrow C + AE$$

$$L_D' \rightarrow D - AB$$

$$L_E' = E + AC$$

$$\text{D. a. } \hat{A} = \frac{L_A + L_A'}{2}$$

blån. för \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} og \hat{E}

$$\text{ Dessutom } \hat{AD} = \frac{L_B - L_B'}{2}, \quad \hat{AE} = -\frac{(L_C - L_C')}{2}, \quad \hat{AB} = \frac{L_D - L_D'}{2}, \quad \hat{AC} = -\frac{(L_E - L_E')}{2}$$

För lägga fraktyrvarne ut $\hat{I} = -BCDE$

Definierande Relationer för de 16 försöken ut de för $-BCDE$.