



Faglig kontakt under eksamen: Inger Heidi Slungård  
73 59 18 92

Eksamen i 75051, *Algebra*

Fredag 26. november 1999

Kl. 9-14

Tillatte hjelpemidler: Utdelt kalkulator

Sensurdato: 17. desember 1999

**Oppgave 1**

La  $G = \{1 \leq a \leq 20 \mid a \text{ og } 20 \text{ er relativt primiske}\}$ . Multiplikasjon modulo 20,  $\cdot_{20}$ , er en veldefinert assosiativ binær operasjon på  $G$ .

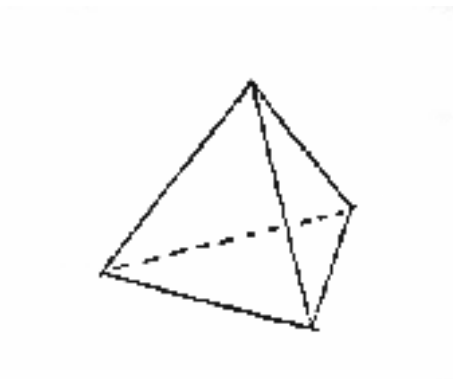
- a) Vis at  $G$  er en gruppe.
  
- b) Hvilken kjent gruppe er  $G$  isomorf med? Svaret skal begrunnes.

**Oppgave 2**

- a) Ringene  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_6$  og  $\mathbb{R}[X]$  er alle kommutative ringer med enhet 1. Hvilke av disse ringene er integritets områder, og hvilke er kroppes? Svarene skal begrunnes.
  
- b) Vis at polynomet  $f(x) = x^3 + 3x + 2$  er irreducibelt over  $\mathbb{Z}_5$ .

**Oppgave 3**

- a) La  $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$ . Skriv  $\rho$  som et produkt av disjunkte syklere og som et produkt av transposisjoner.



- b) Figuren over er et regulært tetraeder. Finn gruppen  $G$  av symmetrier på figuren og beskriv elementene som produkt av disjunkte sykler. (Det oppgis at  $|G| = 12$ .)
- c) Er  $G$  en normal undergruppe av  $S_4$ ? Svaret skal begrunnes.
- d) De 4 flatene på figuren skal fargelegges og du har 5 farger tilgjengelig. Fargelegginger som går over i hverandre ved symmetrier blir betraktet som like. Hvor mange forskjellige fargelegginger kan du lage?

#### Oppgave 4

- a) La  $R$  være en kommutativ ring med enhet 1. Vis at  $R$  er en kropp hvis og bare hvis  $\{0\}$  og  $R$  er de eneste idealene i  $R$ .
- b) La  $F$  være en kropp. Vis at alle idealer i  $F[X]$  er hovedideal, dvs. av formen  $\langle f(x) \rangle$  der  $f(x) \in F[X]$ .
- c) La  $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$  være kroppen med tre elementer. Finn alle moniske irreducibile polynomer i  $\mathbb{Z}_3[X]$  av grad 2.
- d) Konstruer en kropp  $F$  med 9 elementer, og angi de to binære operasjonene på  $F$ .