Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Bjørn Ian Dundas, telefon 735 50242

EKSAMEN I FAG SIF5020 Lineære metoder

Onsdag 27/11-2002
Tid: 09.00–14.00

Hjelpemidler: A
- Alle kalkulatortyper tillatt.
- Alle håndskrevne eller trykte hjelpemidler tillatt.
Sensuren faller 18. desember 2002.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Les gjennom hele settet før du begynner. Om det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatet andre steder i settet.

Oppgave 1 Betrakt matrisen

$$B = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 100 & 0 \\ -12 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

a) Gi en ortogonal diagonalisering av B.

b) Finn e^{tB} og løs initialverdiproblemet

$$x'(t) = Bx(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

I resten av oppgaven lar vi

$$A = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

For letthets skyld oppgis det at $A^T A = B$.

c) Finn singulærverdi dekomposisjonen og pseudoinversen til A.

d) La $b = [0\,1\,2\,3]^T$. Finn den $x \in \mathbf{R}^3$ med minst norm som løser minste kvadraters metode problemet assosiert med ligningen $Ax = b$.

Oppgave 2

La V være et Banachrom og la $A \in \mathcal{L}(V)$ (dvs. en begrenset (bounded) lineær operator på V) med operatornorm $||A|| < 1$. I denne oppgaven skal vi vise at $I - A \in \mathcal{L}(V)$ er invertibel ved å bruke Banachs fikspunktteorem. Her er $I \in \mathcal{L}(V)$ identiteten: $Iv = v$ for alle $v \in V$.

La $T\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ være gitt ved $T(X) = I + AX$ for $X \in \mathcal{L}(V)$.

a) Forklar nøye hvordan man kan bruke Banachs fikspunktteorem til å vise at det finnes én og bare én $X \in \mathcal{L}(V)$ slik at

$$(I - A)X = I.$$

b) Vis ved induksjon at

$$T^{n+1}(0) = I + A + A^2 + \cdots + A^n$$

for $n \geq 0$, og konkludér at

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

er fikspunktet til T. Hvorfor har vi at X er inversen til $I - A$, dvs. at $X(I - A) = (I - A)X = I$?

Oppgave 3

a) La A være en reell $n \times n$ matrise. Forklar hvorfor

$$\langle x, y \rangle_A = x^T A y$$

definerer et indreprodukt på $\mathbf{R}^n$ hvis og bare hvis A er symmetrisk og positiv definit.

b) La v_1, v_2 være de reelle funksjonene gitt ved $v_1(t) = e^t$ og $v_2(t) = e^{-t}$. Betrakt vektorrommet $V = \{av_1 + bv_2 \,|\, a, b \in \mathbf{R}\}$ med indreproduktet

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt.$$

La $T\colon V \to \mathbf{R}^2$ være gitt ved

$$T(av_1 + bv_2) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Finn en 2×2 matrise A slik at om $\mathbf{R}^2$ gis indreproduktet $\langle\ ,\ \rangle_A$ definert i oppgave **a)**, så er T unitær (indreprodukt-bevarende, lineær og bijektiv funksjon).

Oppgave 4

a) Hva er en ortonormal følge i et Hilbertrom? Hva er en **fullstendig** (complete) ortonormal følge?

La ℓ^2 være Hilbertrommet av kvadratisk summerbare følger med vanlig indreprodukt. For $n \in \mathbf{N}$, la $e_n \in \ell^2$ være følgen som har n-te ledd lik 1 og alle andre ledd lik 0. Sjekk alt som må til for å konkludere at $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ er en fullstendig ortonormal følge i ℓ^2.

b) La V være et Hilbertrom. Vis at det duale rommet V^* også er et Hilbertrom.

Oppgave 5 La v_1, v_2 være de reelle funksjonene gitt ved $v_1(t) = e^t$ og $v_2(t) = e^{-t}$. Betrakt vektorrommet $V = \{av_1 + bv_2 \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

Gitt en lineær $D\colon V \to V$, la A være matrisen til D mhp. basisen v_1, v_2, og B matrisen til D mhp. basisen $w_1 = \cosh$, $w_2 = \sinh$. Finn en invertibel matrise S slik at

$$A = S^{-1}BS.$$

Regn tilslutt ut A og B når D er derivasjon, og sjekk også at $A = S^{-1}BS$. Har du noen kommentarer?