**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Løsningsforslag SIF5020, Lineære metoder, Nov 27. 2002

Oppgave 1

a) Enten ved direkte inspeksjon av B, eller ved å løse den karakteristiske ligningen får vi egenverdiene $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 0$. Vektorene

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ og } x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer med egenverdier hhv. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 0$. Disse er automatisk ortogonale (fordi B er symmetrisk), og om vi normaliserer dem får vi en ortonormal basis for $\mathbf{R}^3$ av egenvektorer. Sett dem inn i som søylene i matrisen

$$Q = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

og få den ortogonale diagonaliseringen

$$Q^T B Q = \Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} e^{tB} = e^{tQ\Lambda Q^T} = Q e^{t\Lambda} Q^T &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9e^t + 16 & 0 & -12e^t + 12 \\ 0 & 25e^{4t} & 0 \\ -12e^t + 12 & 0 & 16e^t + 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ligningssystemet har løsningen

$$x(t) = e^{tB} x(0) = \begin{bmatrix} -24e^t + 24 \\ 25e^{4t} \\ 32e^t + 18 \end{bmatrix}$$

c) Da vi har ortogonaldiagonalisert A^TA allerede kan vi sette $Q_2 = Q$ og

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La $Q_1 = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$ være matrisen som fremkommer ved å følge prosedyren for singulærverdidekomposisjonen:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A \frac{x_1}{||x_1||} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} A \frac{x_2}{||x_2||} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

og hvor q_3 og q_4 er vilkårlige, men ortonormale på q_1 og q_2, f.eks. $q_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ og $q_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Setter vi dette inn og regner ut, får vi $A = Q_1 \Sigma Q_2^T$. Pseudoinversen til Σ er

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så pseudoinversen til A er

$$A^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T = \frac{\sqrt{2}}{20} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Flere måter å løse på. F.eks. kan du bruke pseudoinversen fra oppgaven før og få

$$A^+ b = \frac{\sqrt{2}}{20} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

a) Da V er Banach er også $\mathcal{L}(V)$ Banach, og således et komplett metrisk rom. Hvis T er en kontraksjon har T nøyaktig ett fikspunkt. Merk at det å si at X er et fikspunkt for T er det samme som å si at $X = I + AX$, eller med andre ord at $(I - A)X = I$. Vi viser derfor at T er en kontraksjon og er ferdig:

$$||T(X) - T(Y)|| = ||(I + AX) - (I + AY)|| = ||A(Y - X)|| \leq ||A||||X - Y||.$$

I det nest sist steget har vi brukt linearitet av A og i det siste teorem 7.6 i Young.

b) Merk at $T(0) = I$, og anta at $T^n(0) = I + A + \ldots A^{n-1}$. Da har vi at $T^{n+1}(0) = T(T^n(0)) = I + A(I + A + \ldots A^{n-1}) = I + A + \ldots A^n$, og vi har vist formelen ved induksjon. Beviset i Banachs fikspunkt teorem sier at $X = \lim_{n\to\infty} T^n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ er fikspunktet for T.

Men merk at om vi startet med $S(X) = I + XA$ istedetfor T ville vi få nøyaktig samme fikspunkt, som defor tilfredsstiller både $(I - A)X = I$ og $X(I - A) = I$.

Oppgave 3

a) Sjekker kravene til et reelt indreprodukt. At $x^T Ay = \langle x, y\rangle_A = \langle y, x\rangle_A = y^T Ax$ er det samme som å si at A er symmetrisk. Dette kommer av at $y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T A^T y$ (transponering av en én ganger én matrise gjør intet galt). Om dette skal gjelde for alle x og y så er A er symmetrisk (husk at $e_k^T A e_l = A_{kl}$). Omvendt, om A er symmetrisk er $A^T = A$ og ligningen holder trivielt.

Linearitet i første faktor av $\langle x, y\rangle_A = x^T Ay$ setter intet krav til A.

At $\langle x, x\rangle_A > 0$ for alle ikkenull $x \in \mathbf{R}^n$ er per definisjon at A er positiv definit.

b) Vi vil ha at

$$\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle_A$$

for alle $x, y \in V$. Setter vi inn får vi at

$$\begin{aligned}\langle av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2\rangle &= \int_0^1 (ae^t + be^{-t})(ce^t + de^{-t})\,dt = \int_0^1 (ace^{2t} + (bc + ad) + bde^{-2t})\,dt \\ &= ac\frac{1}{2}(e^2 - 1) + (bc + ad) - bd\frac{1}{2}(e^{-2} - 1)\end{aligned}$$

skal være likt

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac\alpha + (bc + ad)\beta + bd\gamma,$$

noe som gir at

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^2 - 1) & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

a) Sjekk opp definisjonene i Young i kapittel 4.

Indreproduktet i ℓ^2 er gitt ved $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$ og fra det ser vi med en gang at

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases},$$

så $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ er altså en ortonormal følge.

Merk at $\langle x, e_n\rangle = x_n$, så at $\langle x, e_n\rangle = 0$ for alle n medfører at $x = 0$, og vi har vist at $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ er en fullstendig ortonormal følge.

b) Vi vet fra teorem 6.5 i Young at V^* er et Banachrom, og det eneste som mangler er et indreprodukt på V^* hvis tilhørende norm er operatornormen. Ved Riesz–Fréchets teorem har vi at for hver $F \in V^*$ finnes en entydig $y \in V$ s.a. $F(x) = \langle x, y\rangle$ for alle $x \in V$. For hvert par $F_1, F_2 \in V^*$ lar vi

$$\langle F_1, F_2\rangle = \langle y_2, y_1\rangle$$

hvor $y_1, y_2 \in V$ er s.a. $F_k(x) = \langle x, y_k\rangle$ for alle $x \in V$. Fra at $\langle\, , \rangle$ er et indreprodukt for V får vi at dette blir et indreprodukt for V^*. Ved andre del av Riesz–Fréchets har vi dessuten at $||F|| = ||y||$, noe som gir for vårt nye indreprodukt at $\langle F, F\rangle = \langle y, y\rangle = ||y||^2 = ||F||^2$.

Oppgave 5 Definér lineær avbildningene $F, G\colon V \to \mathbf{R}^2$ ved $F(av_1 + bv_2) = [a \quad b]$ og $G(aw_1 + bw_2) = [a \quad b]$. For de som synes det er en hjelp kan vi tegne støttetegningen

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^2 \arrow[d, "B\cdot"'] & V \arrow[l, "G"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "D"'] & \mathbf{R}^2 \arrow[d, "A\cdot"'] \\
\mathbf{R}^2 & V \arrow[l, "G"'] \arrow[r, "F"] & \mathbf{R}^2
\end{tikzcd}$$

hvor $A\cdot$ og $B\cdot$ er lineær avbildningene gitt ved multiplikasjon med A og B. Uansett har vi at $A\cdot = FG^{-1}(B\cdot)GF^{-1}$, så S er matrisen til lineær avbildningen GF^{-1}:

$$S = \begin{bmatrix} GF^{-1}(e_1) & GF^{-1}(e_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(v_1) & G(v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(w_1 + w_2) & G(w_1 - w_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Om D er derivasjon har vi at $D(av_1 + bv_2) = av_1 - bv_2$, så

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

men samtidig har vi $D(aw_1 + bw_2) = aw_2 + bw_1$, så

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$