Hullet i rotasjonene

Johan L.R. Dahl, Erik Korsnes og Marius Thaule

24. april 2003

Sammendrag

Når man snakker om hullet i rotasjonene, mener man en egenskap ved rommet av rotasjoner i $\mathbb{R}^3$. En løkke er en endimensjonal vei som starter og slutter i samme punkt. For rom uten hull, har vi at alle løkker kontinuerlig kan deformeres over i hverandre. I rommet av rotasjoner, $SO(3)$, har vi to typer løkker, den trivielle og den ikke-trivielle. Dette skyldes hullet i rotasjonene.

1 Problemstilling

Vi vil med dette prosjektet gi en forklaring på følgende fenomen:

Gitt en gjenstand med tre eller flere tråder knyttet til seg, roter rundt en akse løpende tvers gjennom sentrum av gjenstanden. Roterer man en hel gang rundt aksen, får man en floke som det viser seg er umulig å løse opp ved bare å trekke og dra i trådene. Dersom man roterer en gang til, så klarer man faktisk å nøste opp floken!

Fenomenet vi har beskrevet virker til å ha en underliggende struktur, der to hele rotasjoner gir samme effekt som ingen rotasjon.

Målet vårt er å vise at fenomenet gjelder generelt. Vi begynner med litt grunnleggende informasjon. Deretter innfører vi den teorien vi trenger. Til slutt oppnår vi et resultat som bekrefter antagelsen om et hull i rommet av rotasjoner.

2 Rom

Rom kan ha forskjellig strukturelle egenskaper. Tidligere har vi kun blitt eksponert for flate rom eller *euklidske* rom, det vil si $\mathbb{R}^n$ for en $n \in \mathbb{N}$. I denne rapporten vil vi se eksempler på kurvede rom.

Eksempel. Et kjent tilfelle av kurvede rom er n-sfæren,

$$S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p| = 1\}$$

som er et n-dimensjonalt rom. Dette rommet er krummet, da alle rette linjer går over til å bli sirkler i $\mathbb{R}^{n+1}$. Slik vil S^1 være en sirkel med radius en, og S^2 er en kuleflate med radius en (jamfør en såpeboble). Se figur 1 for illustrasjon. Høyere ordens sfærer er ikke så lett å gi håndfaste eksempler på, men de er greie å jobbe med. Etterhvert vil vi se at vi kommer til å jobbe med S^3.

Når man snakker om hull i rom, menes en egenskap ved selve rommet. Det finnes forskjellig former for hull. Vi er interessert i de hull som deler veier inn i klasser.

3 Rommet av rotasjoner, $SO(3)$

Rommet av rotasjoner er mengden av de lineærtransformasjonene som roterer et punkt i $\mathbb{R}^3$. Disse lineærtransformasjonene representeres som ortogonale 3×3 - matriser med positiv determinant, $SO(3)$.

(a) S^1 **(b)** S^2

Figur 1: En-sfæren og to-sfæren

Definisjon (Rommet $SO(3)$). Med rommet $SO(3)$ menes mengden

$$SO(3) = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} | A^T A = I \ , \ \det(A) = 1\right\}$$

der vi leser $SO(3)$ som de *spesielle ortogonale* 3×3 - *matrisene.*

Rotasjonsmatrisen

En rotasjon i rommet er gitt ved en retning(akse) og en rotasjonsvinkel om aksen. Lar vi aksen være gitt ved en vektor, står vi fritt til å la rotasjonsvinkelen være gitt ved lengden av vektoren. Dermed får vi en komplett beskrivelse av alle rotasjoner ved hjelp av tre variable, så $SO(3)$ er et tredimensjonalt rom.

En generell rotasjon om en vilkårlig vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vil kunne beskrives ved basisskifte til basis som har $\vec{v}$ som tredje basisvektor. Vi kan representere en rotasjon om den tredje vektoren i en basis bestående av tre vektorer, på matriseform som

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

For å kunne utføre en rotasjon om en vilkårlig vektor, trenger vi funksjonen h som utfører basisskifte til vår nye basis, roterer i denne basisen og skifter tilbake til standard basis. Funksjonen er gitt ved

$$h(\vec{v}) = S_{\vec{v}} R_\theta S_{\vec{v}}^T \quad \text{der} \quad S_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & x \\ u_2 & w_2 & y \\ u_3 & w_3 & z \end{pmatrix}$$

er en ortogonal 3×3 - matrise med positiv determinant. Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{w}$ står ortogonalt på hverandre og egenvektoren $\vec{v}$. Med andre ord har vi

$$\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} u_2 w_3 - w_2 u_3 \\ u_3 w_1 - w_3 u_1 \\ u_1 w_2 - w_1 u_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}^T \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \cdot \vec{u} = \vec{w}^T \cdot \vec{w} = 1 \ .$$

Ved utregning finner vi at

$$h(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x^2 + (1-x^2)\cos\theta & -z\sin\theta + xy(1-\cos\theta) & y\sin\theta + xz(1-\cos\theta) \\ z\sin\theta + xy(1-\cos\theta) & y^2 + (1-y^2)\cos\theta & -x\sin\theta + yz(1-\cos\theta) \\ -y\sin\theta + xz(1-\cos\theta) & x\sin\theta + yz(1-\cos\theta) & z^2 + (1-z^2)\cos\theta \end{pmatrix}$$

det vil si $S_{\vec{v}} R_\theta S_{\vec{v}}^T$ blir uavhengig av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{w}$. Det viser seg at $h(\vec{v})$ er en 3×3 - matrise som er ortogonal og som har positiv determinant. Med andre ord et element i $SO(3)$.

4 Teori

Som nevnt i problemstillingen, må vi innføre en del begreper og resultater før vi kan diskutere fenomenet.

Topologiske rom

Et topologisk rom er en mengde X og en samling undermengder $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ av X, lukket under union og endelig snitt. Denne samlingen blir kalt de åpne mengdene i X. En *homeomorfi* er en bijektiv kontinuerlig funksjon slik at den inverse funksjonen også er kontinuerlig. Det vil da være en en-til-en korrespondanse mellom de åpne mengdene slik at rommene er strukturelt like. Vi sier at de er *homeomorfe*.

Veihomotopi

Definisjon (Vei og løkke). En *vei* i et rom X fra x_0 til x_1 er en kontinuerlig avbildning

$$\gamma : I \to X \ , \ \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$$

der I er enhetsintervallet $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. En *løkke* er en vei som starter og slutter i samme punkt.

Definisjon (Veihomotopi). To veier γ_0 og γ_1 sies å være *homotope* dersom det finnes en kontinuerlig avbildning

$$G : I \times I \to X$$

slik at

$$G(s,0) = \gamma_0(s) \text{ og } G(s,1) = \gamma_1(s)$$
$$G(0,t) = x_0 \text{ og } G(1,t) = x_1$$

En slik avbildning kalles en *homotopi*.

Man kan visualisere dette som en kontinuerlig deformering av en vei over i en annen hvor endepunktene holdes fast. Homotopi er en ekvivalensrelasjon, og deler dermed veiene i X inn i klasser av homotope veier. Disse klassene kalles *homotopiklasser*.

Fundamentalgruppen

Vi begrenser oss nå til å se på de løkkene som har utspring i et fast punkt i rommet. Ved å innføre en binær operasjon på klassene av homotope veier vil mengden av homotopiklasser gi oss en gruppe.

Definisjon (Veisammensetning). Dersom f er en vei i rommet X fra x_0 til x_1, og g er en vei i X fra x_1 til x_2, sier vi at produktet $f * g$ er veien h gitt ved

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{for } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s-1) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Vi leser $f * g$ som f sammensatt med g.

Den neste definisjonen er hentet fra [2].

Definisjon (Homomorfi, isomorfi). En strukturbevarende avbildning mellom to grupper kalles en *homomorfi*. En *isomorfi* er en bijektiv homomorfi. Hvis det eksisterer en isomorfi mellom to grupper har de samme orden og samme gruppestruktur slik at de er identiske i algebraisk forstand. Vi sier at gruppene er *isomorfe*, betegnet $\simeq$.

Definisjon (Fundamentalgruppen). Vi lar produktet av to homotopiklasser være gitt ved $[\gamma] \cdot [\omega] = [\gamma * \omega]$, det vil si klassen til sammensetning av veiene. Mengden av homotopiklasser med denne operasjonen danner en gruppe kalt *fundamentalgruppen* til X relativt x_0 og betegnes $\pi_1(X, x_0)$.

Definisjon (Indusert avbildning). En kontinuerlig funksjon $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induserer en homomorfi

$$\begin{aligned} h_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] &\mapsto [h \circ \gamma] \end{aligned}$$

mellom fundamentalgruppene til X til Y.

Fra [3] har vi følgende resultat.

Teorem (Fundamentalgrupper til homeomorfe rom). *La X og Y være to rom, og $f : X \to Y$ være en homeomorfi. Da er $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.*

Fundamentalgruppen kalles også 1. homotopigruppe, fordi den grupperer de endimensjonale løkkene i rommet. Tilsvarende vil den n. homotopigruppen, π_n, gruppere løkker av dimensjon n (lukkede flater av dimensjon n) i rommet. For eksempel kan man tenke på 2. homotopigruppe ved å trekke et laken over rommet og se om man kan trekke det inn igjen. Slik vil blant annet rommet $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ha en triviell fundamentalgruppe, mens den har en ikke-triviell 2. homotopigruppe.

Overdekning og løfting av vei

Et overdekningsrom er kort sagt et rom som lokalt har samme struktur som rommet vi studerer.

Definisjon (Overdekningsrom). La E og X være to rom og la $p : E \to X$ være kontinuerlig og surjektiv. En åpen mengde $\mathcal{U} \subseteq X$ sies å være *jevnt dekket* hvis

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$$

der $\{V_\alpha\}$ er en samling av disjunkte åpne mengder i E, $\mathcal{A}$ er en indekserende mengde, og $p|_{V_\alpha}$ er en homeomorfi mellom V_α og $\mathcal{U}$. Hvis hvert punkt $x \in X$ har en omegn som er jevnt dekket ved p, kalles p en *overdekningsavbildning* og E et *overdekningsrom* for X.

Definisjon (Løfting). La $p : E \to B$ være en avbildning. Dersom $f : X \to B$ er en kontinuerlig avbildning, vil en løfting av f være en avbildning $\tilde{f} : X \to E$ slik at $p \circ \tilde{f} = f$. Dette er ekvivalent med at diagrammet under kommuterer.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Fra dette kan vi utlede følgende resultat. Se [3] for utfyllende detaljer.

Teorem (Entydig løfting av vei). *La $p : E \to B$ være en overdekningsavbildning. Gitt et punkt $e \in p^{-1}(b_0)$ vil en vei i B som starter i b_0 ha en entydig løfting til en vei i overdekningsrommet E som starter i e. Hvis to veier i B er veihomotope, vil løftingene i E være veihomotope.*

Spesielt vil løftingene av homotope veier ende i samme punkt. Dermed kan vi definere en funksjon fra homotopiklassene til løkkene inn i inversbildet til start/endepunktet b_0,

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

der ϕ kalles løftingskorrespondansen til p. Hvis E er enkeltsammenhengende, det vil si det bare er en type løkker opp til homotopi, vil ϕ være en bijektiv funksjon. Dermed kan vi telle antall elementer i fundamentalgruppen til B, ved å telle antall elementer i $p^{-1}(b_0)$.

Kvaternionene

Rundt 1843 førsøkte matematikeren Hamilton å konstruere et tallsystem for å kunne regne med rotasjoner av $\mathbb{R}^3$ på samme måte som komplekse tall gir rotasjoner av $\mathbb{R}^2$. Tallsystemet han skapte, *kvaternionene*, $\mathbb{H}$, er det samme som $\mathbb{R}^4$. Et kvaternion kan sees på som et hyperkomplekst tall. Det består av en reell del og tre imaginære deler, og kan skrives som

$$q = a + bi + cj + dk \ ; \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \ .$$

Addisjon skjer elementvis, mens multiplikasjon er noe mer komplisert. For å multiplisere to kvaternioner bruker man de vanlige *distributive lovene* sammen med en del definerte forhold som er:

$$ij = k, \ jk = i, \ ki = j, \ ji = -k, \ kj = -i, \ ik = -j \ .$$

Legg merke til at forholdet mellom de tre imaginære retningene i,j og k ligner på det vanlige kryssproduktet for vektorer. Dessuten har man at:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ .$$

Ellers ligner regning med kvaternioner veldig på de vanlige komplekse tall. En viktig forskjell er at multiplikasjon mellom kvaternioner ikke er kommutativ (for eksempel er $ij = -ji$). Ellers har vi at lengden av et kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ er

$$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Helt analogt med komplekse tall har vi at den konjugerte er gitt ved

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

og at inversen av et kvaternion er

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\bar{q} \ ; \ q \neq 0 \ .$$

5 Fundamentalgruppen til $SO(3)$

Å rotere et fysisk objekt er en kontinuerlig prosess hvor hver roterte tilstand er et punkt i rommet av rotasjoner. Hele prosessen kan da beskrives ved å gå en vei i rommet av rotasjoner som starter i identitetsrotasjonen.

Vi har observert at en hel rotasjon som ender i identiteten gir oss en annen tilstand enn den vi startet med, og en rotasjon til av samme type, bringer oss tilbake til starttilstanden. Dette antyder en algebraisk struktur hvor ethvert element er sin egen invers.

Den enkleste gruppen med en slik egenskap består av to element og betegnes $\mathbb{Z}_2$. Vi vil derfor prøve å vise at $\pi_1(SO(3))$ er strukturelt lik, det vil si isomorf, med $\mathbb{Z}_2$. Dette vil vi vise ved å demonstrere at S^3 er en to-foldig overdekning, det vil si at det finnes en surjektiv to-til-en avbildning til $SO(3)$, slik at $\pi_1(SO(3))$ har orden 2. Vi viser dette resultatet på to forskjellige måter.

Overdekningsavbildning

Vi er nå ute etter å finne en eksplisitt funksjon

$$k : S^3 \to SO(3)$$

som er en overdekningsavbildning. Enhetskvaternionene er essensielt S^3, ettersom

$$S^3 = \{q \in \mathbb{R}^4 | \ |q| = 1\} \ .$$

På samme måte som de komplekse tallene på enhetssirkelen gir oss en rotasjon av $\mathbb{R}^2$ vil kvaternionene på enhetssfæren gi oss en rotasjon av $\mathbb{R}^3$ om en gitt akse.

Vi kan representere $\mathbb{R}^3$ ved de rent imaginære kvaternionene ved å la standardbasisen være tilordnet i-, j- og k-vektorene. En rotasjon vil da være gitt ved konjugasjon med en enhetskvaternion,

$$\begin{aligned} R_q : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ p &\mapsto qp\bar{q} \end{aligned}$$

der p er en rent imaginær kvaternion og q er en enhetskvaternion. Merk at for enhver q er R_q en lineær avbildning. Lar vi

$$q = a + bi + cj + dk$$

får vi en lineær transformasjon med egenvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

med egenverdi lik 1. Altså en rotasjon. Ved å regne ut $R_q(i)$, $R_q(j)$ og $R_q(k)$ får vi henholdsvis første, andre og tredje kolonne i matrisen

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & -2(ad-bc) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & -2(ab-cd) \\ -2(ac-bd) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

som er ortogonal og har positiv determinant. Ved å la rotasjonen om $\vec{v}$ være gitt ved

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

får vi at

$$\cos\theta = 2a^2 - 1$$

slik at

$$\theta = 2\arccos(a) = 2\arcsin(\sqrt{b^2+c^2+d^2}) \ .$$

Konklusjonen blir her at vår $p \in S^3$ gir den gitte rotasjonen ovenfor. Samtidig har vi at $-p$ gir nøyaktig den samme rotasjonen, og det er kun disse to kvaternionene som gir dette resultatet. Dette betyr at inversbildet til k har to elementer for alle p. Dermed har vi funnet at $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Homeomorfiavbildning

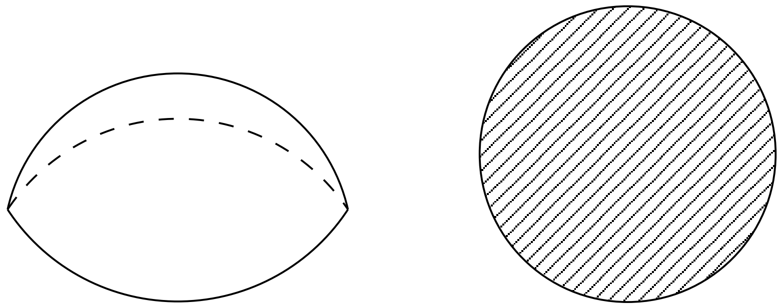
En måte å "se" S^3 på er ved stereografisk projeksjon (leseren henvises til [1] og [3] for hva stereografisk projeksjon er) ned på $\mathbb{R}^3$. Slik kan vi projisere den ene halvkulen inn i en ball i $\mathbb{R}^3$.

Definisjon (Reelle projektive n-rom). Ved å identifisere motliggende punkter på n-sfæren får vi det *reelle projektive n-rom*

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n / p \sim -p \ .$$

Ved å la $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ representere den ene halvkulen av enhetssfæren og identifisere motstående punkter på randen, får vi en lukket ball i $\mathbb{R}^3$ hvor de antipodale punktene på randen er identifisert med hverandre. Med andre ord har vi at den ene halvkulen av enhetssfæren er homeomorf med en lukket ball.

Eksempel. Betrakter vi S^2 kan vi dele den i to halvkuler. Slik kan $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ bli representert ved den ene av disse to halvkulene. Dermed har vi at $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ er homeomorf med den lukkede ballen, eller den lukkede *disken* i $\mathbb{R}^2$, hvor to og to randpunkt diamentralt ovenfor hverandre er identifisert. Se figur 2 for illustrasjon.



Figur 2: Nordlig halvkule til S^2 homeomorf med den lukkede disken

Avbildningen som identifiserer to punkter i S^3 med hverandre, er en overdekningsavbildning. Dermed har $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ fundamentalgruppe av orden 2.

Sammensetningen av avbildningen som tar et punkt i $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ og identifiserer det med en vektor i en lukket ball, og avbildningen som identifiserer en vektor med en matrise i $SO(3)$ er en homeomorfi. Dermed har disse isomorfe fundamentalgrupper og vi kan igjen konkludere at $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Vi kan oppsummere gangen i utregningen ved hjelp av følgende diagram

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "h\circ p"] & \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \arrow[r, "h"] & SO(3) \end{tikzcd}$$

der $h \circ p$, sammensetningen av overdekningsavbildningen p og homeomorfien h er en overdekningsavbildning fra S^3 inn i $SO(3)$.

Avsluttende ord

Vi retter en stor takk til vår veileder Bjørn Ian Dundas for utmerket hjelp, hyggelig veiledningstimer på hans kontor og ikke minst for å ha gitt oss en så morsom oppgave. Harald Kittang fortjener også en stor takk for hans bidrag til sluttproduktet.

Referanser

[1] Bredon, G.: *Topology and Geometry,* Springer Verlag, New York 1995

[2] Fraleigh, J.: *A First Course in Abstract Algebra 7th edition,* Addison Wesley, New York 2002

[3] Munkres, J.: *Topology 2nd edition,* Prentice Hall, New York 2000