Forslag til prosjekt og masteroppgaver
Industriell matematikk 2012

Fraksjonelle diffusjonslikninger

Veileder: Espen R. Jakobsen, Institutt for matematiske fag (erj@math.ntnu.no).

Bakgrunn: Diffusjonslikninger er likninger som beskriver diffusjonsfenomener som f.eks. gassdiffusjon i fysikk og aksjepriser i finans. Det enkleste eksemplet er varmelikningen

$$u_t - \Delta u = f(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

der $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ og $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$. I mange anvendelser oppstår det som kalles anormal diffusjon hvor diffusjonslikningen tar følgende form

$$u_t - \Delta^\alpha u = f(x), \quad \alpha \in (0, 1),$$

der Δ^α er en fraksjonell derivert som kan defineres på mange ulike (ekvivalente) måter, f.eks. ved hjelp av Fouriertransformen

$$\Delta^\alpha \phi(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha} \hat{\phi}(\xi)) \quad \text{der} \quad \xi \in \mathbb{R}^3,\ \hat{\phi} = \mathcal{F}\phi,$$

eller som et singulært integral

$$\Delta^\alpha \phi(x) = c_\alpha \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z|>\epsilon} \frac{\phi(x+z) - \phi(x)}{|z|^{3+2\alpha}} dz,$$

eller ved hjelp av egenfunksjoner/verdier til Δ, $\Delta \phi_i = \lambda_i \phi_i$ i $\mathbb{R}^3$ for $i \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^\alpha \phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha c_i \phi_i(x) \quad \text{for alle funksjoner } \phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x).$$

Den kan også defineres ved hjelp av stokastisk analyse og er nært knyttet til det såkalte fraksjonelle Sobolevrommet H^α. I denne oppgaven har du derfor muligheten til å lære deg teknikker fra teorien om partielle differensiallikninger og et eller flere andre områder innenfor matematikken: Fourieranalyse, Potensialteori, Funksjonalanalyse, Stokastisk analyse, samt (om du vil) anvendelsesområder som fysikk og finans. En eller flere av følgende problemstillinger kan være aktuelle:

Problemstillinger:

1. Studere stasjonære diffusjonslikninger

$$-\Delta^\alpha u = f(x) \quad \text{eller} \quad u - \Delta^\alpha u = f(x)$$

   på områder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ved hjelp av teorien for svake løsninger og Risz representasjonsteorem. Dette er en naturlig generalisering av teorien for Laplace likning slik den presenteres i kurset "TMA4305 partielle differensiallikninger" som ikke er lett tilgjengelig i litteraturen per i dag.

2. Studere tidsavhengige diffusjonslikninger ved hjelp av Fourier transformen og Fourierrekker. Her kan en starte med å generalisere løsningsmetoden for varmelikningen slik den presenteres f.eks. i kurset "TMA4305 partielle differensiallikninger". Heller ikke dette er lett tilgjengelig i litteraturen.
3. Studere endelig elementmetoder og/eller sepktralmetoder for fraksjonelle likninger matematisk. F.eks. kan en vha. liknende teknikker som i oppgave 1 studere konvergens og gi et konstruktivt eksistensbevis for løsninger av den opprinnelige likningen. Dette vil være en naturlig generalisering av teori som presenteres i kursene "TMA4305 partielle differensiallikninger" eller "TMA4220 Num Part Diff Elem" og som ikke er lett tilgjengelig i litteraturen per i dag.
4. Studere fraksjonelle diffusjonslikninger som opptrer som Black-Scholes likninger i matematisk finans. Dette er litt mer komplisert enn i oppgave 1 og 2. Fourier metoder kan ikke anvendes men svake løsninger kan studeres med metodene i kap 7.1 i Evans bok "Partial Differential Equations". Alternativt kan en bruke stokastisk analyse eller teorien for viskositetsløsninger.

I alle tilfeller er det mulig (men ikke nødvendig) å kombinere teoretiske studier med numeriske metoder, simuleringer og analytiske feilestimater.

Kommentar: Å erstatte den 2. deriverte med en fraksjonell (2.) derivert er veldig naturlig fra et fysisk ståsted. Den underliggende mikroskopiske modellen for varmelikningen er basert på Brownsk bevegelse eller "virrevandring". Banen til en partikkel som virrevandrer er kontinuerlig (men ingen steder deriverbar!). Hvis en tillater at partiklene kan hoppe fra et punkt til et annet - da vil den makroskopiske diffusjonslikingen bli en fraksjonell diffusjonslikning som beskrevet over.

Bakgrunnslitteratur:

1. Svake løsninger av stasjonære diffusjonslikninger:
   – Kap 6.2 i McOwen: *Partial Differential Equations* og
   – kap. 6.1 og 6.2 i Evans: *Partial Differential Equations.*
2. Løsning av varmelikning vha Fouriertransform:
   – Kap. 5.2 i McOwen: *Partial Differential Equations.*
3. Svake løsninger av diffusjonslikninger:
   – Kap 7.1 i Evans: *Partial Differential Equations.*
4. Fraksjonelle (2.) deriverte og fraksjonelle Sobolev rom H^{α}:
   – Artikkelen *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces* av Di Nezza, Palatucci og Valdinoci, se http://arxiv.org/abs/1104.4345.
   – Kap. 2 i PhD avhandlingen til Silvestre: *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator.*
   (Kan lastes ned her *http://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/1727*),
   – kap. 6 i Folland: *Introduction to Partial Differential Equations.*
   – engelsk Wikipedia (søk på fractional sobolev spaces)

- Kap. 2 og 4 i artikkelen til Abels og Kassmann *An analytic approach to purely nonlocal Bellman equations arising in models of stochastic control.* Journal of Differential Equations 236 (2007), no. 1.

5. Anvendelser i Finans:
   - Schoutens: *Levy Processes in Finance* og
   - Cont og Tankov: *Financial Modelling with Jump Processes.*
   - Kap. 1.4 i PhD avhandlingen til Silvestre: *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator.*
6. Andre anvendelser:
   - Metzler and Klafter: The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) R161–R208.*