Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.2

10 Kurvene $x = y^2$ og $x = y + 6$ skjærer hverandre i $y = -2$ og $y = 3$; $x = y + 6$ ligger til høyre for $x = y^2$. Arealet til skive nr. i er derfor omtrent:

$$\pi\big((y_i^* + 6)^2 - (y_i^{*2})^2\big) = \pi(y_i^{*2} + 12y_i^* + 36 - y_i^{*4}),$$

mens tykkelsen er Δy (husk at vi roterer området om y-aksen). Derfor blir volumet (se side 375)

$$V = \int_{y=-2}^{3} \pi\big((x_{\text{høyre}})^2 - (x_{\text{venstre}})^2\big)\, dy = \pi \int_{-2}^{3} (y^2 + 12y + 36 - y^4)\, dy = 500\pi/3.$$

12 Arealet til skive nummer i blir tilnærmet $A(x_i^*) = \pi f(x_i^*)^2 = \pi(x_i^* - x_i^{*3})^2$, og tykkelsen på skiven blir Δx. Kurven $y = x - x^3$ skjærer x-aksen i $x = 0$ og $x = 1$. Siden vi roterer om x-aksen blir volumet

$$V = \int_{x=0}^{1} \pi(x - x^3)^2\, dx = \pi \int_{0}^{1} (x^2 - 2x^4 + x^6)\, dx = 8\pi/105.$$

16 Denne gangen roterer vi om linjen $x = 2$. Området vi skal rotere om denne linjen er det som avgrenses av $y = 1 - x^2$ og x-aksen. Her varierer derfor y fra 0 til 1. Arealet av hver skive blir ca. $A(y_i^*) = \pi\big[\big(2 + (1 - y_i^*)^{1/2}\big)^2 - \big(2 - (1 - y_i^*)^{1/2}\big)^2\big]$, slik at volumet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{1} \pi[(2 + (1 - y)^{1/2})^2 - ((2 - (1 - y)^{1/2})^2]\, dy \\ &= \pi \int_{0}^{1} 8(1 - y)^{1/2}\, dy = -8\pi\tfrac{2}{3}\Big[(1 - y)^{2/3}\Big]_0^1 = 16\pi/3. \end{aligned}$$

40 Vi lar x variere fra A til B; det tilsvarer $-a \le x \le a$ dersom vi plasserer sentrum i grunnflaten i origo i xy-planet.

For en gitt x er arealet til snittet:

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2$$

der r er radien i den aktuelle halvsirkelen som altså står vinkelrett på x-aksen. Vi må finne r. Randen til legemets grunnflate beskriver en sirkel $x^2 + y^2 = a^2$ i planet. Da må r være den vinkelrette avstanden fra x til denne sirkelen, det vil si at $r = y = (a^2 - x^2)^{1/2}$.

Dette gir oss

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\big[(a^2 - x^2)^{1/2}\big]^2 = a^2 - x^2,$$

og dermed blir volumet av legemet (merk at vi bruker symmetrien):

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)dx = 2\int_{0}^{2} \tfrac{1}{2}\pi[a^2 - x^2]dx = \pi\Big[a^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^a = 2\pi a^3/3.$$

Dette virker rimelig, siden legemet faktisk er en halvkule.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.3

28 Vi roterer området avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $x = y^2$ om linjen $y = -1$. Husk på at radiene i sylinderskallene er 1 større enn om vi roterer om $y = 0$. Da får vi at volumet tilnærmet er gitt ved

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i^* + 1)\big(f(y_i^*) - g(y_i^*)\big)\,\Delta y,$$

der vi har delt opp intervallet $0 \le y \le 1$ i n like store deler; y ligger i dette intervallet siden de to kurvene skjærer hverandre i $y = 0$ og $y = 1$.

Her er $x = f(y) = y^{1/2}$ og $x = g(y) = y^2$. y varierer fra 0 til 1, og vi får

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{1} 2\pi(y+1)\big(f(y) - g(y)\big)\,dy = 2\pi\int_0^1 (y+1)(y^{1/2} - y^2)\,dy \\ &= 2\pi\int_0^1 [y^{3/2} + y^{1/2} - y^3 - y^2]\,dy = 29\pi/30. \end{aligned}$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.4

22 Vi skal finne lengden av den glatte kurven $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$, fra $y = 1$ til $y = 5$. Vi kan bruke formel (3) på side 391 i boken. Vi finner at $dx/dy = (y-1)^{1/2}$. Da er lengden av kurven gitt ved

$$\begin{aligned} s &= \int_{y=1}^{5} \sqrt{1 + (dx/dy)^2}\,dy = \int_1^5 \sqrt{1 + ((y-1)^{1/2})^2}\,dy \\ &= \int_1^5 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}\Big[y^{3/2}\Big]_1^5 = \frac{2}{3}(5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

42 Vi skal finne arealet av flaten vi får når vi roterer kurven $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ rundt y-aksen.

P.g.a. symmetrien kan vi finne arealet av flaten over x-aksen og multiplisere med 2.

Vi ser på kruven gitt ved $y = g(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$. Vi har altså en kurve som avhenger av x og som roteres rundt y-aksen. Bruker vi formel (12) på side 396 i boken, får vi

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx = 2\cdot 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1 + [x^{-2/3} - 1]}\,dx \\ &= 4\pi\int_0^1 x^{2/3}\,dx = 4\pi\Big[\frac{3}{5}x^{5/3}\Big]_0^1 = 12\pi/5. \end{aligned}$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

32 Vi skal først derivere uttrykket $\ln\big(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\big)$. Ved å bruke kjerneregelen gjentatte ganger finner vi,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\ln\Big(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big)\Big] &= \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big] = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{2}{(1-\sin x)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x \\ &= \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{2}{(1-\sin x)^2}\cdot\cos x = \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos x}, \end{aligned}$$

som skulle vises.

Alternativt kunne vi skrevet om uttrykket så det blir lettere å derivere:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\ln\Big(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big)\Big] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\big] \\ &= \frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\end{aligned}$$

Vi vil finne lengden s av kurvestykket $y = \ln\cos x$ for $x \in [0, \pi/4]$. Bruker da at (Rottmann, side 173)

$$s = \int_{*}^{**} \sqrt{1+\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Her finner vi ved kjerneregelen at

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Siden $1+\tan^2 x = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ blir da

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\Big[\ln\big(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln\big(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}\big)-\ln 1\Big) = \ln\sqrt{2(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$