NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5003 Matematikk 1 for F1 høsten 2002

Løsningsforslag - Øving 8

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.5

$\boxed{18}$ (a) Differentialligningen $\frac{dI}{dx} = -1{,}4I$ har løsning $I(x) = Ce^{-1{,}4x}$ (bruk teorem 1 side 459, eller integrer direkte som for enhver annen separabel ligning: $\int I^{-1}\,dI = -1,4\int dx$ gir $\ln I = -1{,}4\,x + A$, etc). Her er $C = I(0) = I_0$. Vi skal løse ligningen $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Det gir

$$I_0 e^{-1{,}4x} = \frac{1}{2}I_0 \Rightarrow e^{-1{,}4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{1{,}4} \approx 0{,}495.$$

(b) Lysintensiteten ved 10 meter er

$$I(10) = I_0 e^{-1{,}4\cdot 10} \approx 0{,}000000832 I_0 = \frac{I_0}{1202600}$$

(c) Må løse $I(x) = 0{,}01\,I_0$. Vi får da

$$I_0 e^{-1{,}4x} = 0{,}01 I_0 \Rightarrow e^{-1{,}4x} = 0{,}01 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}01}{-1{,}4} \approx 3{,}29\,\text{meter}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.6

$\boxed{16}$ La $x(t)$ være kg salt i tanken ved tiden t (målt i sekunder). Får oppgitt at $x(0) = 50\,\text{kg}$. Vi antar at saltet hele tiden er jevnt fordelt i vannet. Rent vann renner inn med rate $r\,\text{L/s}$, så vi får ikke inn noe mer salt i tanken. Saltholdig vann med konsentrasjon $\frac{x(t)}{1000}\,\text{kg/L}$ ved tiden t renner ut med samme rate $r\,\text{m/s}$. Dermed avtar saltkonsentrasjonen med $\frac{r}{1000}x(t)\,\text{kg/s}$, og differentialligningen vi skal løse er

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{1000}x(t)$$

Teorem 1 side 459 gir løsningen $x(t) = 50e^{-rt/1000}$. Vi skal finne hvor lang tid det tar før det er bare 10 kg salt igjen i tanken. Må da løse $x(t) = 10$. Det gir

$$\frac{1}{5} = e^{-rt/1000}; t = -\frac{1000\cdot \ln\frac{1}{5}}{-r} \approx \frac{1609}{r}\,\text{sekunder}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.2

$\boxed{26}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 2n}{\ln 3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 2 + \ln n}{\ln 3 + \ln n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\ln 2}{\ln n}+1}{\frac{\ln 3}{\ln n}+1}\right) = \left(\frac{0+1}{0+1}\right) = \underline{\underline{1}}$$

$\boxed{56}$ Gitt Fibonaccifølgen $\{F_n\}$ fra eksempel 2. Legg først merke til at

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ impliserer at } \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Dermed, med $a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ så er $a_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

Hvis vi nå antar $\tau = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$ eksisterer, så ved å la $n \to +\infty$ i siste ligning får vi

$$\tau = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n}) = 1 + \frac{1}{\tau}.$$

Dermed har vi

$$\tau^2 = \tau + 1 \Rightarrow \tau^2 - \tau - 1 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

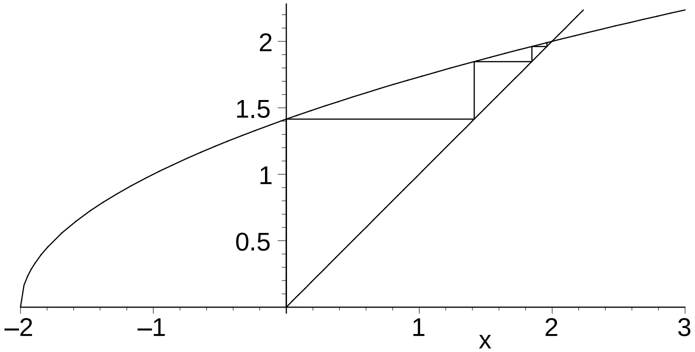
Siden $a_n > 0$ for alle $n \geq 1$, så kan ikke τ være negativ. Derfor er $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\boxed{58}$ Tilsvarende eksempel 13 har vi at

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

kan tolkes som $\lim_{n\to\infty} a_n$, der $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er gitt i oppgaven. Vi vil bruke kompletttheten av de reelle tall (Bounded Monotonic Sequence Property i E & P) som sier at enhver begrenset, monoton følge konvergerer. Første utfordring blir dermed å vise at $\{a_n\}_1^{\infty}$ er monoton og begrenset. Til det kan vi bruke induksjonsbevis 2 ganger.

Ved å prøve seg litt frem (kalkulator) finner vi at 2 er et fornuftig anslag på øvre grense. En figur viser det kanskje enda tydeligere. Det vil vi nå vise ved induksjon, dvs vi vil vise $a_n < 2$ for alle $n \geq 1$.



Figur til oppgave 11.2.58: Grafen til $y = \sqrt{2+x}$, sammen med diagonalen $y = x$. Trappekurven antyder hvordan man finner følgen $x_0 = 0$, x_1, $x_2, \ldots$ grafisk: Gitt x_n går man vertikalt til grafen, så horisontalt til diagonalen for å finne x_{n+1}.

n=1 er OK siden $a_1 = \sqrt{2} < 2$

Anta nå at hypotesen stemmer for n=k, dvs vi antar at $a_k < 2$. Da har vi

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$$

og vi har dermed vist $a_n < 2$ for alle $n \geq 1$ ved induksjon.

Det neste vi trenger er at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende. Dette vil vi også bruke induksjon for å vise. Induksjonshypotesen i dette tilfelle er

$$a_n < a_{n+1} \text{ for alle } n \geq 1.$$

n=1: Hypotesen sier da $a_1 < a_2$, dvs $\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Dette stemmer.

Anta nå at hypotesen stemmer for n=k, dvs vi antar $a_k < a_{k+1}$. Må vise at $a_{k+1} < a_{k+2}$.

$$a_{k+2} = \sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{2 + a_k} = a_{k+1}$$

der ulikheten kommer fra antagelsen $a_k < a_{k+1}$. Dermed har vi også vist at følgen er monoton.

Tilslutt gjenstår det å finne grenseverdien. Det lar seg nå gjøre ved et enkelt triks siden vi vet den eksisterer. Kall grensen for M, dvs $\lim_{n\to\infty} a_n = M$. Da vil også $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = M$, så

$$M = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + M}$$

Kvadrering gir $M^2 - M - 2 = 0$, og løsning av 2. gradsligning gir M=2 (Den negative løsningen $M = -1$ gir ikke mening her fordi det er opplagt at $M > 0$). Dermed har vi vist at

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} = 2$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.3

2 Dette er en geometrisk rekke der forholdstallet er $r = e^{-1} \approx 0.368$. Teorem 1 på s. 637 i EP gir da at

$$\sum_0^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}$$

10 Vi har rekka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

der a_n er gjeve ved:

$$a_n = n^{-\frac{1}{n}}$$

Vi finn $\lim_{n\to\infty} a_n$ for å sjekke om $a_n \to 0$. Om a_n ikkje går mot 0, kan ikkje summen konvergere.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} \\
\ln \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \ln a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{\ln n}{n} \to \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Her nytta vi L'Hôpital sin regel, og vi ser at rekka divergerer ($a_n \not\to 0$)

SIF5003 Matematikk 1 for F1 høsten 2002

52 For rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$$

får vi partialsummer som "teleskoperer":

$$\begin{aligned}
S_n &= [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + [\ln 4 - \ln 3] + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] \\
&= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

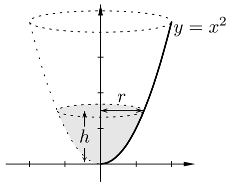
Det følger av dette at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

så rekka divergerer.

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

98 Vanntanken på figuren fremkommer ved at kurven $y = x^2$ for $0 \leq x \leq 2$ dreies om y-aksen.



a) Vi regner ut volumet ved å integrere over sirkelskiver med areal πr^2 hvor $r = x = \sqrt{y}$. Se figuren. Da blir

$$V(h) = \pi \int_0^h (\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^h y \, dy = \pi \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_0^h = \frac{\pi h^2}{2}.$$

b) Vi bruker nå kjerneregelen og finner

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \pi h \cdot \frac{dh}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h}$$

Ved å sette inn $h = 1$ finner vi at vannhøyden stiger med $\frac{1}{\pi}$ meter pr. time i det øyeblikket vannhøyden er 1 meter.

c) Fra oppgaveteksten finner vi at

$$\frac{dV}{dt} = -\tilde{k}\sqrt{h},$$

hvor $\tilde{k}$ er en positiv proporsjonalitetskonstant. Vi bruker kjerneregelen på samme måte som over, og kan skrive opp

$$\pi h \frac{dh}{dt} = -\tilde{k}\sqrt{h} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{h}\frac{dh}{dt} = -k.$$

Konstanten $k = \frac{1}{\pi}\tilde{k}$.

d) Vi løser først differensialligningen over. Det er en separabel ligning, slik at

$$\int \sqrt{h}\,\mathrm{d}h = -k \int \mathrm{d}t + \tilde{C} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3}h\sqrt{h} = -kt + \tilde{C} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = (-\tfrac{3}{2}kt + C)^{\frac{2}{3}}.$$

For å bestemme konstantene C og k bruker vi initialbetingelsene $h(0) = 2$ og $h(3) = 1$. $h(0) = C^{\frac{2}{3}} = 2$ gir at $C = 2\sqrt{2}$. Videre er $h(3) = (2\sqrt{2} - \frac{9}{2}k)^{\frac{2}{3}} = 1$ slik at $k = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}$. Vannhøyden er derfor gitt av ligningen

$$h(t) = \left(2\sqrt{2} - \tfrac{2\sqrt{2}-1}{3}t\right)^{\frac{2}{3}}.$$

For å finne hvor lang tid tanken bruker på å tømmes løser vi ligningen $h(t) = 0$.

$$h(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \approx 4.64.$$

Det vil si at tanken bruker ca. 4.64 timer på å tømmes.