NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5003 Matematikk 1
for F1 høsten 2002

Løsningsforslag - Øving 11

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.3

50 Vi bruker delvis integrasjon, og velger (ihht likning (3) s. 517 i E&P) $u = x^{n-1}$ og $dv = xe^{-x^2}\,dx$. Dette gir $du = (n-1)\,x^{n-2}dx$, og siden

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

velges $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Nå gir likning (3) :

$$\begin{aligned}\int x^n e^{-x^2}dx &= x^{n-1}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\left[(n-1)\,x^{n-2}\right]dx \\ &= -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}\int x^{n-2}e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

56 Av oppgave 9.3.50 vet vi at et integral på formen $\int x^n e^{-x^2}dx$ kan reduseres til $\int x^{n-2}e^{-x^2}dx$. Hvis n er et oddetall, og vi bruker formelen tilstrekkelig mange ganger vil denne typen integral reduseres til det kjente $\int xe^{-x^2}dx$. Vi følger denne strategien!

$$\begin{aligned}\int x^5e^{-x^2}dx &= -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} + \frac{4}{2}\int x^3e^{-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} + 2\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \frac{2}{2}\int xe^{-x^2}dx\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - x^2e^{-x^2} + 2\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

Vi får da følgende:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5e^{-x^2}dx &= \left[-\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}\right]_0^1 \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2}e^{-1} - e^{-1} - e^{-1}\right) - (-1)\right] \\ &= 1 - \frac{5}{2}e^{-1}\end{aligned}$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.4

12 Vi løser integralet ved (to ganger) å doble vinkelen. Dvs vi skriver om integranden ved å bruke likhetene $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ og $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Vi får:

$$\begin{aligned}
\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 &= \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos 2x + \left(\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)\right] \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

18 Vi bruker likheten $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$ og får

$$\int \sin^3\phi\cos^4\phi\, d\phi = \int \sin\phi\left(1-\cos^2\phi\right)\cos^4\phi\, d\phi$$

Substitusjonen $u = \cos\phi$ vil nå være hensiktsmessig. Av dette følger det at $du = -\sin\phi\, d\phi$, og vi har redusert problemet til følgende integral:

$$\int -\left(1-u^2\right)u^4\, du = \int \left(u^6 - u^4\right)\, du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

Nå gjenstår det bare å substituere tilbake - d.v.s.

$$\int \sin^3\phi\cos^4\phi\, d\phi = \frac{1}{7}\cos^7\phi - \frac{1}{5}\cos^5\phi + C$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.5

30 Vi merker oss først at

$$\frac{x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Med andre ord er

$$\int \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}\, dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Det første integralet kan antas kjent (men se Rottmann, formel 19) side 135, med $a = b = 1$):

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

Det andre integralet kan forenkles ved hjelp av Rottmann formel 5) side 133, med $A = b = 0$, $B = a = c = k = 1$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C$$

Kombinerer vi de to, ender vi med

$$\int \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{2\,(x^2+1)} + \frac{3}{2}\arctan x + C$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

$\boxed{44}$ Vi vil bestemme grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3}.$$

Hvis vi setter inn for $x=0$ får vi et 0 over 0 uttrykk, slik at vi kan bruke L'Hopitals regel. Dette gir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

$\boxed{48}$ **a)** Vi vil regne ut integralet

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Vi bruker først delbrøkoppspalting for å skrive om brøken i integralet. Vi må bestemme A, B og C slik at

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}.$$

Dette gir $Ax^2+A+Bx^2+Cx = 2$ slik at $A=2$, $B=-2$ og $C=0$. Følgelig er

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln x - \ln(x^2+1) + C = \ln\frac{x^2}{x^2+1} + C.$$

b) For å løse initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x(x^2+1)}, \qquad y(1)=1,$$

observerer vi at ligningen er separabel. Dermed kan vi skrive

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln y = \ln\frac{x^2}{x^2+1} + C.$$

For å bestemme C setter vi inn initialbetingelsen $y(1)=1$,

$$0 = \ln\tfrac{1}{2} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \ln 2.$$

Tilslutt løser vi for y ved å anvende eksponentialfunksjonen,

$$y = e^{\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\ln 2} = \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

59 Vi vil beregne det bestemte integralet

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Vi substituerer med $u = e^x$. Da er $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x$, slik at

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{u(1+u+u^{-1})}\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty \frac{1}{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

For å løse dette integralet kan vi bruke formel 6b på side 133 i Rottmann, med $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ og $c = 1$. Vi kan også beregne dette selv ved å komplettere kvadratet,

$$u^2 + u + 1 = (u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Dette gir da

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{1+u+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int_1^\infty \frac{1}{\frac{3}{4}+(u+\frac{1}{2})^2}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\int_1^\infty \frac{1}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}u+\frac{1}{\sqrt{3}})^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^\infty \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan c]_1^\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

hvor vi underveis foretar substitusjonen $v = \frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}$.