

Kjeglesnitt

Harald Hanche-Olsen

hanche@math.ntnu.no

Versjon 1.0 – 2013-01-25

Innledning

Kjeglesnittene – sirkler, ellipser, parabler og hyperbler – er klassiske kurver som har vært studert siden antikken. Kjeglesnittene har mange anvendelser også i moderne tid: Planetbaner og satelittbaner er kjeglesnitt, vi har parabolantenner, og refleksjonsegenskapene til ellipser benyttes for å knuse nyrestein med sjokkbølger uten å skade pasienten.

Definisjonen kan synes enkel nok: Start med to linjer i rommet som skjærer hverandre i ett punkt, men ikke vinkelrett. Hold den ene linjen fast, og rotér den andre rundt den første. Den roterte linjen vil nå beskrive en *dobbeltkjegle*: To enkeltkjegler med sirkulært tverrsnitt og med felles toppunkt, nemlig skjæringspunktet mellom to linjene vi startet med.

Velg så et plan som ikke inneholder toppunktet til dobbeltkjeglen. Snittet mellom dobbeltkjeglen og planet er en kurve, og det er slike kurver som kalles kjeglesnitt.

Kjeglesnittene har mange andre beskrivelser. Vi skal velge en annen beskrivelse enn den over, som ikke involverer noen begreper fra tredimensjonal geometri.

Den belgiske matematikeren Dandelin ga i 1822 et ganske elegant, og rent geometrisk, bevis for at de to beskrivelsene gir de samme kurvene. Jeg vil gi en skisse av beviset i forelesningen, men jeg skal ikke prøve å gjengi det her.

Definisjon og grunnleggende egenskaper

Et *kjeglesnitt* er en plan kurve gitt av en *styrelinje* ℓ , et *brennpunkt* \mathcal{B} og et positivt tall ε som vi kaller *eksentrisiteten* til kjeglesnittet.¹ Et punkt \mathcal{P} i planet ligger på kjeglesnittet bestemt av disse tre størrelsene dersom

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon|\mathcal{P}\ell|,$$

der $|\mathcal{P}\mathcal{B}|$ er avstanden mellom punktene \mathcal{P} og \mathcal{B} , og $|\mathcal{P}\ell|$ er avstanden fra \mathcal{P} til styrelinjen ℓ .

I vårt lille studium av kjeglesnittene tenker vi oss planet utstyrt med et aksekors slik at \mathcal{B} ligger på x -aksen, og styrelinjen ℓ er parallell med y -aksen.

Mer konkret: $\mathcal{B} = (B, 0)$, og ℓ er gitt ved ligningen $x = L$.

Nå kan vi skrive ligningen for et vilkårlig punkt $\mathcal{P} = (x, y)$ slik:

$$\sqrt{(x - B)^2 + y^2} = \varepsilon|x - L|.$$

Men det er et hakk mer hendig å kvadrere begge sider og flytte litt på leddene, så ligningen blir slik:

$$y^2 = \varepsilon^2(x - L)^2 - (x - B)^2. \quad (1)$$

Det er derimot ikke spesielt nyttig å gange ut parentesene, annet enn for å oppdage at *dersom* vi gjør det, og samler like potenser av x , så får vi et andregradspolynom der koeffisienten foran x^2 er $\varepsilon^2 - 1$.

Kjeglesnittet skjærer x -aksen der hvor høyresiden av (1) er null, altså er gitt ved $\varepsilon(x - L) = \pm(x - B)$. Så lenge $\varepsilon \neq 1$ får vi to nullpunkter $x = x_1$ og $x = x_2$, der

$$x_1 = \frac{B + \varepsilon L}{1 + \varepsilon}, \quad x_2 = \frac{B - \varepsilon L}{1 - \varepsilon}. \quad (2)$$

Når $\varepsilon = 1$ får vi derimot bare ett nullpunkt, i $x_1 = \frac{1}{2}(B + L)$.

Vi vet at et andregradspolynom med to nullpunkter x_1 og x_2 kan skrives som en konstant ganger $(x - x_1)(x - x_2)$. I vårt tilfelle er konstanten lik koeffisienten foran x^2 , altså $\varepsilon^2 - 1$. Dermed kan (1) skrives slik, dersom $\varepsilon \neq 1$:

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)(x - x_1)(x - x_2). \quad (3)$$

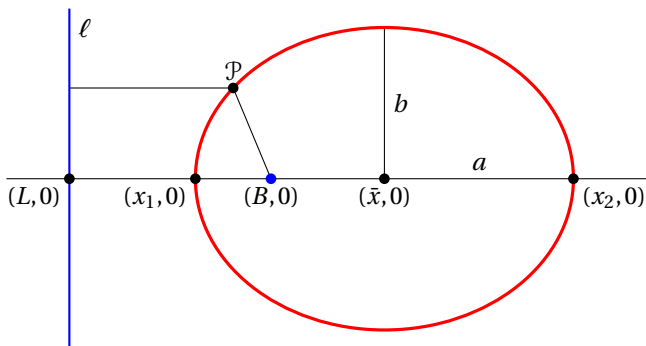
Det er på tide å avbryte disse generelle betraktningene og fokusere på ellipsene.

¹I tillegg kommer *sirklene*, som vi regner som kjeglesnitt med eksentrisitet 0.

Ellipser

En *ellipse* er et kjeglesnitt med eksentrisitet $\varepsilon < 1$.

For å kunne lage mest mulig konkrete figurer, antar vi at brennpunktet ligger til høyre for styrelinjen: $B > L$.



Figur 1: En ellipse med eksentrisitet $\varepsilon = 0.6$, brennpunkt $(B, 0)$ og styrelinje ℓ gitt ved $x = L$. Avstanden fra et vilkårlig punkt \mathcal{P} på kurven til brennpunktet er ε ganger avstanden til styrelinjen.

Fra (2) får vi

$$x_2 - x_1 = \frac{(B - \varepsilon L)(1 + \varepsilon) - (B + \varepsilon L)(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon(B - L)}{1 - \varepsilon^2} > 0,$$

så $x_2 > x_1$. Vi introduserer den *store halvaksen* a og *midpunktet* \bar{x} ved

$$a = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{\varepsilon(B - L)}{1 - \varepsilon^2}, \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}, \quad (4)$$

slik at

$$x_1 = \bar{x} - a, \quad x_2 = \bar{x} + a.$$

Setter vi disse inn i (3), får vi

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2).$$

Men siden $\varepsilon^2 - 1 < 0$, er det bedre å skrive dette som

$$(1 - \varepsilon^2)(x - \bar{x})^2 + y^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2.$$

Så dividerer vi med høyresiden, og får ligningen på formen

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{der } b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} < a.$$

Mens a kalles ellipsens *store halvakse*, kaller vi b dens *lille halvakse* (sett inn $x = \bar{x}$, finn y , og se figur 1). Vi kan også uttrykke eksentrisiteten ved forholdet mellom halvaksene:

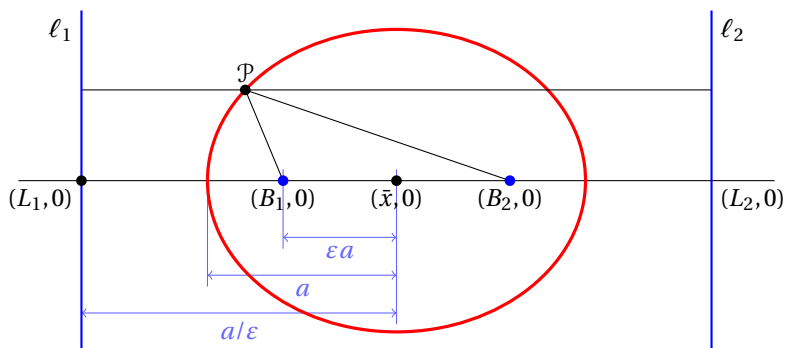
$$\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Vi kan nå løse ligningene i (4) med hensyn på B og L , og få

$$B = \bar{x} - \varepsilon a, \quad L = \bar{x} - \frac{a}{\varepsilon}.$$

I figuren er det tydelig at ellipsen er symmetrisk om den vertikale linjen $x = \bar{x}$. Dette er også tydelig fra ligningen vi har utledet, men det er på ingen måte opplagt ut fra den opprinnelige definisjonen basert på brennpunkt og styrelinje. Hvis vi speiler brennpunktet og styrelinjen gjennom linjen $x = \bar{x}$, får vi et nytt brennpunkt og en ny styrelinje, med

$$B_2 = \bar{x} + \varepsilon a, \quad L_2 = \bar{x} + \frac{a}{\varepsilon}.$$



Figur 2: Samme ellipse som i figur 1 med de to brennpunktene og de to styrelinjene. Fordi avstanden fra et vilkårlig punkt \mathcal{P} på kurven til $(B_1, 0)$ er ε ganger avstanden til ℓ_1 , og tilsvarende gjelder avstanden til $(B_2, 0)$ og ℓ_2 , og fordi summen av avstandene til de to styrelinjene må være konstant, er også summen av avstandene til de to brennpunktene konstant. Som målene i nedre venstre del antyder, danner avstandene fra sentrum \bar{x} til henholdsvis styrelinjen, enden av halvaksen, og brennpunktet en geometrisk progresjon: Hver av dem er ε ganger forgjengeren.

Det skulle være klart at om vi skyver brennpunkt og styrelinje langs x -aksen uten å endre avstanden mellom dem, så vil det tilhørende kjeglesnittet følge med uten å endre form. Det faller naturlig å skyve dem slik at midtpunktet for kurven havner i origo, det vil slik at $\bar{x} = 0$. I så fall får vi ligningen for ellipsen på *normalform*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Sirkler som ellipser med eksentrisitet 0

Setter vi $b = a$, får vi $\varepsilon = 0$, og (5) blir ligningen for en sirkel med radius a :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Men det er verdt å merke seg at diskusjonen som går forut for dette blir helt feil om vi lar $\varepsilon = 0$ fra starten av. Det som skjer om vi holder $\bar{x} = 0$ og a fast mens $\varepsilon \rightarrow 0$, er at $L \rightarrow -\infty$. Med andre ord: Styrelinjen forsvinner ut mot det uendelig fjerne når ε nærmer seg null.

Parabler

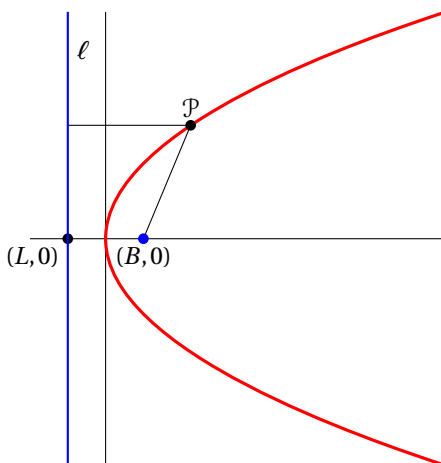
En *parabel* er et kjeglesnitt med eksentrisitet $\varepsilon = 1$.

En god del av diskusjonen foran feiler i dette tilfellet, for vi har dividert med $\varepsilon^2 - 1$ mange steder. Så vi går helt tilbake til (1), setter inn $\varepsilon = 1$ og forenkler, med resultatet

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2.$$

Normalformen får vi når vi plasserer brennpunkt og styrelinje symmetrisk om origo, slik at $L = -B$: Da blir ligningen

$$y^2 = 4Bx.$$

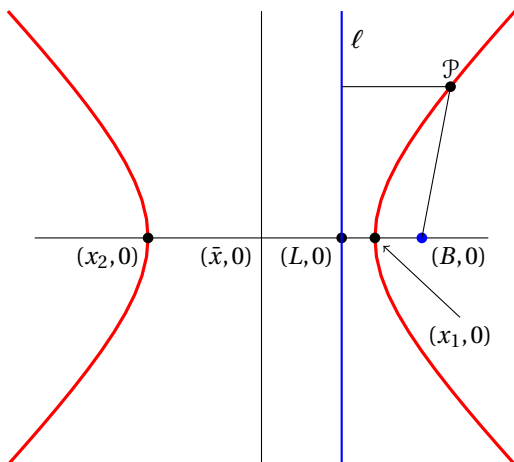


Figur 3: En parabel.

Hyperbler

En *hyperbel* er et kjeglesnitt med eksentrisitet $\varepsilon > 1$.

Som for ellipsene antar vi at $B > L$ for å gjøre det mest mulig konkret.



Figur 4: En hyperbel med eksentrisitet $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Samme regning som for ellipsene gir oss fra (2)

$$x_2 - x_1 = \frac{2\varepsilon(B-L)}{1-\varepsilon^2} < 0,$$

så $x_2 < x_1$ (det motsatte av ellipsetilfellet). Vi skriver

$$a = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{\varepsilon(L-B)}{1-\varepsilon^2}, \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}, \quad (6)$$

slik at

$$x_1 = \bar{x} + a, \quad x_2 = \bar{x} - a.$$

Setter vi disse inn i (3), får vi

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2),$$

som vi like godt skriver på formen

$$-(\varepsilon^2 - 1)(x - \bar{x})^2 + y^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2.$$

Så dividerer vi med høyresiden, og får ligningen på formen

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{der } b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Vi kan kanskje kalle a kalles hyperbelens *halvakse*, mens en geometrisk tolkning av b er litt mer vrien – men se figur 5! Vi kan også uttrykke eksentrisiteten ved forholdet mellom b og a :

$$\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Vi kan nå løse ligningene i (6) med hensyn på B og L , og få

$$B = \bar{x} + \varepsilon a, \quad L = \bar{x} + \frac{a}{\varepsilon}.$$

I figuren er det tydelig at hyperbelen er symmetrisk om den vertikale linjen $x = \bar{x}$. Dette er også tydelig fra ligningen vi har utledet, men det er på ingen måte opplagt ut fra den opprinnelige definisjonen basert på brennpunkt og styrelinje. Hvis vi speiler brennpunktet og styrelinjen gjennom linjen $x = \bar{x}$, får vi et nytt brennpunkt og en ny styrelinje, med

$$B_2 = \bar{x} - \varepsilon a, \quad L_2 = \bar{x} - \frac{a}{\varepsilon}.$$

Akkurat som for ellipsen er det ofte naturlig å legge koordinatsystemet slik at sentrum havner i origo. Da får vi ligningen på *normalform*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Når $|x|$ og $|y|$ er store i forhold til a og b , virker det rimelig at ettallet i (7) kan neglisjeres. Hvis vi fjerner det, reduseres ligningen til

$$\frac{|y|}{b} = \frac{|x|}{a}.$$

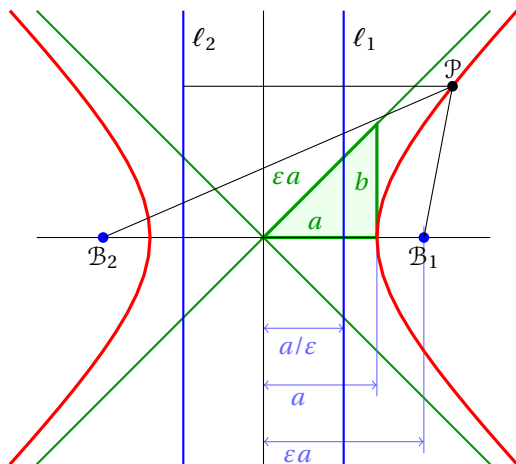
De to linjene gitt ved denne ligningen,

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a},$$

kalles hyperbelens *asymptoter*. Vi kan faktorisere venstresiden i (7), med resultat

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Når vi går langt ut på hyperbelen i første eller tredje kvadrant, så blir den andre faktoren på venstre side stor, og den første faktoren tilsvarende liten. Dette viser at kurven virkelig nærmer seg linjen $x/a - y/b = 0$. Tilsvarende gjelder i andre og fjerde kvadrant, men da med linjen $x/a + y/b = 0$.



Figur 5: Samme hyperbel som i figur 4 med begge brennpunkt og styrelinjer samt asymptotene vist. På samme måte som for ellipsen danner avstandene fra sentrum til henholdsvis styrelinjen, enden av halvaksen og brennpunktet en geometrisk progresjon med faktor ε . Samtidig er det tegnet inn en trekant som viser en geometrisk tolkning av sammenhengen mellom a , b og ε .

Kjeglensnitt i polarkoordinater

Ligningen for et kjeglensnitt blir ekstra enkel i polarkoordinater, om vi plasserer brennpunktet i origo ($B = 0$) og styrelinjen i $x = -L$, med $L > 0$. Når $\varepsilon \leq 1$ (ellipser og parabler) ligger hele kjeglensnittet til høyre for styrelinjen, mens for tilfellet $\varepsilon > 1$ (hyperbler) ser vi bare på hyperbelgrenen til høyre. Så avstanden til styrelinjen blir $L + x = L + r \cos\theta$, mens avstanden til brennpunktet blir r . Formelen for kjeglensnittet i polarkoordinater blir $r = \varepsilon(L + r \cos\theta)$, eller om vi løser med hensyn på r :

$$r = \frac{\varepsilon L}{1 - \varepsilon \cos\theta}.$$

Det er også interessant å se en gang til på grensen $\varepsilon \rightarrow 0$. Om vi velger en radius $R > 0$, setter $L = R/\varepsilon$ og så lar $\varepsilon \rightarrow 0$, får vi simpelthen $r = R$ i grensen: Formelen i polarkoordinater for en sirkel med radius R og sentrum i origo.

Generelle andregradskurver i planet

Kort sammendrag av dette avsnittet: Andregradskurver i planet er enten kjeglesnitt (det vanligste) eller de består av en eller to linjer, eventuelt bare et punkt. De kan også være tomme. *Du må ikke finne på å pugge det som står nedenfor!* Det er mye greiere å huske noen prinsipper og anvende dem på hvert enkelt tilfelle etter behov.

En generell andregradskurve i planet består av løsningene til en ligning på formen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

der A , B , C , D , E og F er gitte konstanter og minst en av de tre konstantene A , B og C er ulik null (hvis ikke, har vi en førstegradskurve, som bare blir en rett linje).

I lineæralgebraen vises det hvordan man kan fjerne kryssleddet Bxy ved å innføre et nytt koordinatsystem som er rotert i forhold til det opprinnelige. Denne teknikken ligger utenfor rekkevidden av dette notatet, så vi skal tenke oss at det allerede er gjort, og konsentrere oss om situasjonen der $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{8}$$

– Dersom $A \neq 0$ og $C \neq 0$ kan vi komplettere kvadratene i x og y hver for seg, og dermed bringe ligningen til formen

$$A(x - \bar{x})^2 + C(y - \bar{y})^2 = G,$$

der \bar{x} , \bar{y} og G er nye konstanter. Hvis $G \neq 0$ kan vi dividere med G , og ser at vi får en hyperbel dersom A og B har motsatt fortegn, og enten en ellipse eller den tomme mengden om de har samme fortegn (avhengig av fortegnet til G).

Hvis $G = 0$, får vi bare et punkt $((x, y) = (\bar{x}, \bar{y}))$ dersom A og B har samme fortegn, eller to linjer som skjærer hverandre om de har motsatt fortegn.

– Dersom $A = 0$ og $C \neq 0$ har vi bare et kvadrat i y å komplettere, og (8) kan gis formen

$$C(y - \bar{y})^2 = -Dx + G.$$

Dette gir en parabel dersom $D \neq 0$.

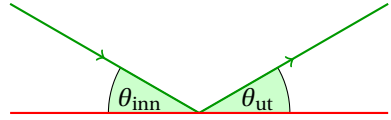
Dersom $A = D = 0$ er ligningen kun en andregradsligning i y . Den ligningen vil ha en, to eller ingen løsninger, som gir en eller to horisontale linjer i planet, eller den tomme mengden.

Tilsvarende skjer dersom $C = E = 0$: Vi får en eller to vertikale linjer i planet, eller den tomme mengden.

– Dersom $A \neq 0$ og $C = 0$ så har vi samme situasjon som over, bare med x og y byttet om.

Refleksjonsegenskaper

Før vi kan se på refleksjonsegenskapene til kjeglesnittene, må vi finne ut hvordan en lysstråle reflekteres fra en kurve. Virkelighetens verden er selvsagt tredimensjonal, men vi kan alltid se på lysstråler og refleksjon i planet: Vi må bare tenke oss at speilene vi bruker, har en dimensjon vinkelrett på planet vi jobber i. Slik blir et plant speil til en rett linje i planet. Vi kjenner refleksjonsloven for plane speil: Innfallsvinkel er lik utfallsvinkel, der begge vinklene ligger mellom null og nitti grader (dvs mellom 0 og $\pi/2$).

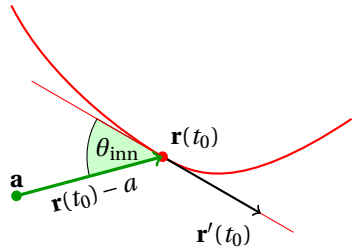


For et *krumt* speil skal vi regne med at en lysstråle reflekteres som om de hadde truffet et plant speil som tangerer det gitte krumme speilet i punktet der lysstrålen treffer.

Så vi tenker oss et krumt speil beskrevet som en kurve i planet, der vi har valgt å se bort fra den tredje dimensjonen. Vi skriver kurven på parameterform:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Tangentplanet i et gitt punkt $\mathbf{r}(t_0)$ er parallelt med tangentvektoren $\mathbf{r}'(t_0)$, som vi skal anta er forskjellig fra nullvektoren.



Vi ser på en lysstråle som kommer fra et punkt \mathbf{a} i planet og treffer kurven i $\mathbf{r}(t_0)$. Vinkelen θ_{inn} mellom lysstrålen og tangentvektoren er gitt ved

$$(\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = |\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{r}'(t_0)| \cdot \cos \theta_{\text{inn}} \quad (9)$$

Merk at θ_{inn} kan ta alle verdier i $[0, \pi]$: Den er enten innfallsvinkelen i vanlig forstand, eller komplementvinkelen til denne.

Vi skal knytte (9) til den deriverte av *avstanden* fra \mathbf{a} til $\mathbf{r}(t)$. Vi deriverer

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{a})}$$

med hensyn på t , og finner

$$\frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|}{dt} = \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t)}{\sqrt{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{a})}} = \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|}$$

Om vi nå sammenligner med (9), ser vi at

$$\cos \theta_{\text{inn}} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t_0)|} \left. \frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (10)$$

(Notasjonen på slutten betyr den deriverte av avstanden med hensyn på t , regnet ut i $t = t_0$).

Nå kan vi endelig vise refleksjonsegenskapen for ellipser. Vi tenker oss gitt en ellipse med to brennpunkter \mathbf{a} og \mathbf{b} .

Refleksjonsegenskapen er denne: *Hvis en lysstråle fra \mathbf{a} reflekteres i et punkt på ellipsen, vil den reflekterte lysstrålen passere gjennom \mathbf{b} .*

For å vise dette, parametriserer vi en bit av ellipsen ved en vektorfunksjon $\mathbf{r}(t)$ – det spiller ingen rolle hvordan, bare vi sørger for at funksjonen er deriverbar, med $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Vi trenger å vise at de to vektorene $\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{a}$ og $\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{b}$ danner komplementærvinkler θ_{inn} og θ_{ut} med tangentvektoren til ellipsen. De to vinklene er gitt ved

$$\cos\theta_{\text{inn}} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t_0)|} \left. \frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|}{dt} \right|_{t=t_0} \quad \text{og} \quad \cos\theta_{\text{ut}} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t_0)|} \left. \frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|}{dt} \right|_{t=t_0}$$

og vi må vise at $\theta_{\text{inn}} + \theta_{\text{ut}} = \pi$. Men det er det samme som å vise at

$$\cos\theta_{\text{inn}} + \cos\theta_{\text{ut}} = 0,$$

som er det samme som å vise at

$$\left. \frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|}{dt} \right|_{t=t_0} + \left. \frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

Men det følger av det faktum at $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| + |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|$ er konstant, så den deriverte av denne størrelsen er null.

Et tilsvarende argument viser refleksjonsegenskapen for hyperbler: *Hvis en lysstråle fra det ene brennpunktet reflekteres i en av hyperbelgrenene, vil den reflekterte lysstrålen ha en slik retning at den passerer gjennom det andre brennpunktet om du forlenger den bakover – men den vil altså reflekteres bort fra det andre brennpunktet.*

Vi står over beviset, som er svært likt det for ellipsen.

Refleksjonsegenskapen for parabler er litt annerledes, siden det bare er ett brennpunkt: *En lysstråle parallell med parabelens symmetriakse vil reflekteres fra parabelens innside slik at den passerer gjennom brennpunktet – eller fra utsiden, bort fra brennpunktet, slik at forlengelsen bakover går gjennom brennpunktet.*

Beviset er en variant av det tilsvarende beviset for ellipsen. I figur 3 trenger vi å vise at de to linjene fra \mathcal{P} danner samme vinkel med tangenten til parabolen i \mathcal{P} . Hvis vi parametriserer kurven med $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ så kan vi bruke (10) med $\tilde{\mathbf{a}} = \mathcal{B}$ for å regne ut vinkelen mellom lysstrålen fra \mathcal{B} til $\mathcal{P} = \mathbf{r}(t_0)$ og tangenten i \mathcal{P} .

Vi må arbeide litt mer for den andre vinkelen. La $\vec{\mathbf{s}}(t) = (-L, y(t))$: Dette er fotpunktet av normalen fra $\mathbf{r}(t)$ på ℓ , og deriverer

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)| = \sqrt{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t))}$$

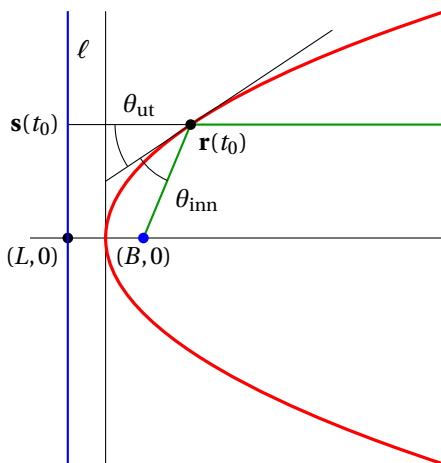
med hensyn på t . Resultatet blir

$$\frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)|}{dt} = \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)) \cdot (\mathbf{r}'(t) - \mathbf{s}'(t))}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)|}$$

Men $(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) = 0$, for den første av disse to vektorene er vinkelrett på ℓ , mens den andre er parallell med ℓ . Dermed står vi igjen med

$$\frac{d|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)|}{dt} = \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)|} = \cos\theta_{\text{ut}}|\mathbf{r}'(t)|.$$

Definisjonen av parabellen gir $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}(t)| = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|$, og sammenligner vi formelen over med (10), finner vi $\theta_{\text{ut}} = \theta_{\text{inn}}$.



Figur 6: Refleksjonsegenskapen til en parabel.