Differensialligninger – eksistens og entydighet

Harald Hanche-Olsen
hanche@math.ntnu.no
Versjon 1.0 – 2013-04-30

Innledning

Dette notatet er ment å gi en smakebit av eksistens- og entydighetsteorien for ordinære differensialligninger. I tråd med smakebitsfilosofien ser jeg på en litt forenklet situasjon, og tar litt lett på noen tekniske detaljer. Håpet er at hovedidéen kommer klarere frem på denne måten.

Problemet vi skal studere kalles et *initialverdiproblem*, og skrives på formen

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \qquad x \in [a,b] \\ y(a) &= c \end{aligned} \tag{1}$$

Med en *løsning* av (1) mener vi en differensiabel funksjon $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ som oppfyller differensialligningen $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ for alle $x \in [a,b]$[1] og *initialbetingelsen* $y(a) = c$.[2]

Jeg skriver like godt opp alle betingelsene jeg vil foreskrive med en gang:

- Jeg antar at $f\colon [a,b] \times [c-d, c+d] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at
$$f(x,y) \le K \tag{2}$$
for $(x,y) \in [a,b] \times [c-d, c+d]$.

- Jeg antar videre at det finnes en konstant L slik at
$$|f(x,u) - f(x,v)| \le L|u-v| \tag{3}$$
for alle $x \in [a,b]$ og $u, v \in [c-d, c+d]$.

- Og til sist antar jeg at
$$K \cdot (b-a) \le d. \tag{4}$$

[1] I endepunktene $x = a$ og $x = b$ må vi tolke $y'(x)$ som en *ensidig* derivert.

[2] Her ser vi alt en av forenklingene jeg lovet: Jeg kunne valgt å spesifisere initialbetingelsen i et annet punkt i $[a,b]$ enn venstre endepunkt, men dette valget forenkler noen beviser senere.

Noen bemerkninger til betingelsene. Det at det finnes en konstant K slik at (2) holder, følger av at f er kontinuerlig, på samme måte som at en kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall er begrenset. Men beviset er litt mer krevende i to eller flere variable.

Eksistensen av en konstant L slik at (3) holder, kalles gjerne en *Lipschitz-betingelse*. Den kan virke uvant, men den følger umiddelbart av en enklere antagelse, nemlig at den *partielt deriverte*[3] $\partial f/\partial y$ eksisterer og er kontinuerlig i hele $[a,b] \times [c-d, c+d]$. Da er den også begrenset, så vi kan skrive

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$$

for en konstant L. Nå kan vi bruke sekantsetningen på $f(x,y)$ betraktet som funksjon av y alene, og få

$$\frac{f(x,u) - f(x,v)}{u-v} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,w)$$

for en w mellom u og v. Fra dette og ulikheten over følger (3) direkte.

Til sist er (4) en naturlig betingelse: For enhver løsning av (1) må jo oppfylle $|y'| \le K$ ved (2), og derfor blir

$$|y(x) - c| = |y(x) - y(a)| = \left|\int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |y'(t)|\,\mathrm{d}t \le K \cdot (x-a) \le K \cdot (b-a),$$

og vi trenger å kreve (4) for å kunne garantere at $y(x) \in [c-d, c+d]$, slik at $f(x, y(x))$ er definert, og slik at vi kan dra nytte av (2) og (3).

For å si det siste litt mer folkelig: Tenk på (2) som en fartsgrense: Den er en øvre grense på hvor fort y kan endre seg. Ligning (2) garanterer at ikke y kan endre seg mer enn d når x går fra a til b.

[3] Det er ikke noe mystisk ved den partielt deriverte. Hvis du holder x fast så er $f(x,y)$ en funksjon av y alene, og $\partial f/\partial y$ er den deriverte i vanlig forstand av denne funksjonen.

Eksistens

Eksistensbeviset begynner med å observere at (1) er ekvivalent med

$$y(x) = c + \int_a^x f\big(t, y(t)\big)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Beviset er enkelt: At (1) impliserer (5), følger av integralregningens fundamentalsetning:

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

På den annen side, om vi deriverer (5) med hensyn på x får vi differensialligningen i (1), og setter vi inn $x = a$ i (5), får vi initialbetingelsen i (1).

For å vise eksistensen av en løsning til (5), prøver vi oss med en enkel iterativ metode:[4]

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= c + \int_a^x f\big(t, y_n(t)\big)\,\mathrm{d}t, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ y_0(x) &= c \end{aligned} \tag{6}$$

Man kan bruke (4) til å vise ved induksjon at $y_n(x) \in [c-d, c+d]$ for alle n og alle $x \in [a, b]$, og at iterasjonen dermed kan fortsette i det uendelige.

Vi finner også at

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left|\int_a^x f(t, c)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |f(t, c)|\,\mathrm{d}t \le K\cdot(x-a), \tag{7}$$

og videre

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left|\int_a^x \big(f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\big)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_a^x \big|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\big|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_a^x L|y_1(t) - y_0(t)|\,\mathrm{d}t && \text{ved (3)} \\ &\le \int_a^x KL\cdot(t-a)\,\mathrm{d}t && \text{ved (7)} \\ &= \frac{KL}{2}\cdot(x-a)^2, \end{aligned}$$

og regner vi videre på samme måte får vi – ved induksjon –

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{KL^{n-1}}{n!}(x-a)^n.$$

[4] Metoden kalles *Picard-iterasjon* etter Charles Émile Picard (1856–1941).

Dette gir oss

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n(x) &= y_0(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\big) \\ &= c + \sum_{k=1}^{\infty} \big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\big), \end{aligned} \tag{8}$$

forutsatt selvsagt at summen konvergerer. Men vi har jo

$$\big|y_k(x) - y_{k-1}(x)\big| \le \frac{KL^{k-1}}{k!}(x-a)^k \le \frac{KL^{k-1}}{k!}(b-a)^k,$$

og

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{KL^{k-1}}{k!}(b-a)^k$$

er konvergent. Nå kan vi bruke Weierstraß' M-test til å konkludere at rekken i (8) er *absolutt og uniformt konvergent* for $x \in [a, b]$.

Spesielt konvergerer $y_n(x)$ uniformt mot en grense $y(x)$. Vi kan konkludere at også $f\big(x, y_n(x)\big) \to f\big(x, y(x)\big)$ uniformt: For gitt $\varepsilon > 0$ finnes N slik at $\big|y_n(x) - y(x)\big| < \varepsilon$ for alle $n \ge N$. Men da kan vi bruke (3) til å få $\big|f\big(x, y_n(x)\big) - f\big(x, y(x)\big)\big| < L\varepsilon$, når $n \ge N$, og dermed er konvergensen uniform.

Takket være den uniforme konvergensen kan vi nå la $n \to \infty$ i (6), og få (5) i grensen. Dermed har vi vist eksistensen av en løsning.

Entydighet

Vi går helt tilbake til (1), og spør om det kan finnes mer enn én løsning. Så vi tenker oss at u og v er to forskjellige løsninger av (1), og definerer $w(x) = u(x) - v(x)$. Enkel subtraksjon gir

$$w'(x) = f\big(x, u(x)\big) - f\big(x, v(x)\big).$$

Vi utnytter Lipschitz-betingelsen (3) og får

$$|w'(x)| \le L|u(x) - v(x)| = L|w(x)|.$$

Nå er vi litt smarte, setter $\varphi(x) = e^{-Lx}w(x)$, og regner ut

$$\varphi'(x) = e^{-Lx}\big(w'(x) - Lw(x)\big).$$

Men takket være ulikheten ovenfor så må $-w'(x) + Lw(x)$ og $w(x)$ ha samme fortegn, så $\varphi(x)\varphi'(x) \le 0$. Det følger at $\varphi(x)^2$ er en ikkevoksende funksjon av x, Siden $\varphi(x) = 0$ og $\varphi(x)^2 \ge 0$, må $\varphi(x) = 0$ for alle x, det vil si $w(x) = 0$, med andre ord $u(x) = v(x)$.

Utvidelser

Entydighetsbeviset kan uten alt for store anstrengelser utvides til vilkårlige intervaller. Så nå går vi over til å betrakte et initialverdiproblem på formen

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \qquad x \in I \\ y(a) &= c \end{aligned} \tag{9}$$

Setning. *Anta at u og v er to løsninger av* (9) *i et intervall I som inneholder a, og at f og $\partial f/\partial y$ er kontinuerlige i alle punkter $(x,u(x))$ for $x \in I$. Da er $u(x) = v(x)$ for alle $x \in I$.*

Likeledes kan vi utvide eksistensresultatet:

Setning. *Anta at $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ er en åpen mengde, at $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ er kontinuerlig, og at $\partial f/\partial y$ også eksisterer og er kontinuerlig på Ω. Dersom $(a,c) \in \Omega$ så finnes det en løsning av* (9) *definert på et intervall (α,β) med $a \in (\alpha,\beta)$, med disse egenskapene:*

- *Hvis $\beta < \infty$ så finnes det en følge (x_k) med $x_k \to \beta$ slik at enten $|y(x_k)| \to \infty$ eller $\big(x_k, y(x_k)\big)$ konvergerer mot et punkt på randen av Ω, og*
- *Hvis $\alpha > -\infty$ så finnes det en følge (x_k) med $x_k \to \alpha$ slik at enten $|y(x_k)| \to \infty$ eller $\big(x_k, y(x_k)\big)$ konvergerer mot et punkt på randen av Ω.*

Her er poenget at det ikke går an å utvide løsningen til et større intervall, av åpenbare grunner. Løsningen kalles derfor den *maksimale* løsningen til (9).

Beviset inneholder ikke vesentlige nye idéer, men er mest et litt infløkt bokholderi. Det kan derfor trygt utsettes til et mer avansert kurs.

Vi kan også utvide all teorien over til *systemer*:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{F}(x,\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{c} \end{aligned} \tag{10}$$

der den ukjente funksjonen $\mathbf{y}$ tar verdier i $\mathbb{R}^n$, og den gitte funksjonen $\mathbf{F}$ likeså. Vi får en eksistens- og entydighetsteori til forveksling lik den for en enkelt ligning, med omtrent de samme bevisene.

En av flere grunner til at dette er interessant, er at vi kan skrive om en høyere ordens differensialligning til et første ordens system: For eksempel kan en differensialligning på formen

$$y'' = f(x,y,y')$$

skrives om ved å innføre $z(x) = y'(x)$, til systemet

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(x,y,z) \end{aligned}$$

som er på formen (10) med

$$\mathbf{F}(x,\mathbf{y}) = \big(z, f(x,y,z)\big), \qquad \text{der } \mathbf{y} = (y,z).$$

Resultatet er at vi får en entydig løsning (y,z) om vi foreskriver en initialbetingelse $\mathbf{y}(a) = (c,d)$, det vil si $y(a) = c$, $y'(a) = d$.

Eksempel. Initialverdiproblemet for en ukjent funksjon s:

$$s'' = -s, \quad s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

kan skrives som et initialverdiproblem for et system:

$$s' = c, \quad c' = -s, \quad s(0) = 0, \quad c(0) = 1.$$

Fra teorien foran ser vi at det finnes en entydig løsning. Vi ser også at

$$\tfrac{1}{2}(s^2 + c^2)' = ss' + cc' = sc - cs = 0,$$

så $s^2 + c^2$ er konstant. Men $s(0)^2 + c(0)^2 = 0^2 + 1^2 = 1$, så $s^2 + c^2 = 1$. Dermed så må den maksimale løsningen være definert på hele $\mathbb{R}$, siden løsningen forblir begrenset.

Jeg har ikke valgt navnene til disse funksjonene tilfeldig. Faktisk er $s(t) = \sin t$ og $c(t) = \cos t$, som du kan se ved å sjekke at disse to løser det gitte problemet. Men hvis vi ikke kjente til de trigonometriske funksjonene, kunne vi brukt løsningen til dette initialverdiproblemet til å *definere* dem, og til å utlede alle egenskapene deres, på lignende måte som vi viste $s^2 + c^2 = 1$ ovenfor. (Men de andre egenskapene går ikke *fullt* så lett å vise.)