



Figure 1: Modell for Wienerfilteret.

1 Wienerfilteret

Et tidsavhengig signal (X) går gjennom et system (S) og forvrenges og tilføres deretter støy (N). Systemet kan for eksempel være instrumentet vi benytter til observasjon av X . Forvrengningen antar vi er lineær og tidsinvariant, slik at den kan modelleres som et (kjent) konvolusjonsfilter, $X \rightarrow S * X$. Deretter legges det til støy slik at observasjonen vår blir

$$Y(t) = \int_{\tau} S(t - \tau)X(\tau) d\tau + N(t).$$

Vi ønsker å rekonstruere X så godt som mulig, og rekonstruksjonen kan altså oppfattes som en såkalt *dekonvolusjon* der vi ønsker å bli kvitt virkningen av S (og N). I følge Fourierteorien kunne en tenke seg å glemme N , benytte at vi da har $\hat{Y}(\nu) = \hat{S}(\nu)\hat{X}(\nu)$, og dermed finne X ved hjelp av Fouriertransformen, $\hat{X}(\nu) = \hat{Y}(\nu)/\hat{S}(\nu)$. I praksis kan en bare glemme en slik idé. Der \hat{S} er liten, kanskje til og med null, vil \hat{Y} stort sett inneholde bidrag fra støyen \hat{N} som dermed blir forsterket når vi dividerer med \hat{S} . Dessuten har støy en lei tendens til å ha en bredbåndet fouriertransform ("hvit støy"), slik at det ikke er enkelt å fjerne den ved for eksempel et bånd-pass filter.

I Wienerfilteret forsøker en likevel å gjøre dekonvolusjonen på en bedre måte. Metoden forutsetter at signalene er *svakt stasjonære stokastiske prosesser* der vi kjenner spektrene, eller i alle fall har en velbegrunnet oppfatning av hvordan spektrene ser ut. Spektralestimering er ellers et stort felt i digital signalbehandling som vi ikke skal gå inn på her. Vi minner om at konvolusjonsfiltre som virker på stokastiske prosesser enkelt kan skrives ved hjelp av spektralrepresentasjonen,

$$A : X \rightarrow A * X,$$

$$A * X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} \hat{A}(\nu) dZ_X(\nu).$$

Et kjent resultat sier at et konvolusjonsfilter er kontinuerlig hvis og bare hvis $\hat{A} \in L^2(\hat{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, d\mu_X)$.

Vi ønsker nå å lage et konvolusjonsfilter, W , som virker på utgangen fra instrumentet, Y , $Y \rightarrow \tilde{X} = W * Y$, slik at rekonstruksjonen \tilde{X} blir så nær X som mulig, dvs. $\mathbb{E} \left| X(t) - \tilde{X}(t) \right|^2 = \text{Var } X(0) - \tilde{X}(0)$ blir minimal. Situasjonen er illustrert i fig.1.

Før vi starter, må vi definere hva som menes med kryss-spekter og kryss-korrelasjon mellom prosesser. Anta, for å forenkle formlene, at alle prosessene har middelvei 0, men dette er naturligvis ikke strengt tatt nødvendig.

To prosesser U og V kalles *simultant* svakt stasjonære hvis de er svakt stasjonære hver for seg og i tillegg oppfyller at kryss-korrelasjonsfunksjonen

$$\rho_{UV}(t_1, t_2) = \text{Cov} \left(U(t_1) \overline{V(t_2)} \right)$$

kun er en funksjon av $t_2 - t_1$ (begrepet lar seg enkelt generalisere til *multivariable* prosesser). Hvis U og V har spektralrepresentasjonene

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} dZ_U(\nu), \quad V(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} dZ_V(\nu),$$

vil også Z_U og Z_V være *gjensidig* ortogonale, dvs.

$$\mathbb{E} \left(Z_U(A) \overline{Z_V(B)} \right) = 0, \text{ hvis } A \cap B = \emptyset.$$

Som på forelesningen kan vi også her approksimere de stokastiske integralene med integral over enkle funksjoner:

$$\begin{aligned} \rho_{UV}(t) &= \text{Cov} \left(U(t) \overline{V(0)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\nu t} dZ_U(\nu) \overline{dZ_V(\nu')} \right\} \\ &= \lim_{\mathcal{P}, \mathcal{P}' \rightarrow 0} \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} e^{i\nu t_j} \mathbb{E} \left\{ Z_U(A_j) \overline{dZ_V(A'_j)} \right\} \\ &= \lim_{\mathcal{P} \rightarrow 0} \sum_{\mathcal{P}} e^{i\nu t_j} \mu_{UV}(A_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} d\mu_{UV}(\nu). \end{aligned}$$

Det (komplekse) målet

$$\mu_{UV}(A) \triangleq \mathbb{E} \left(Z_U(A) \overline{Z_V(A)} \right), \quad A \in \mathcal{B},$$

kalles for *kryss-spektret* til U og V , og vi ser at det nettopp er *fouriertransformen til kryss-korrelasjonsfunksjonen*. Når vi manipulerer med stokastiske integraler, er det hensiktsmessig å skrive den mer formelle overgangen ovenfor på ”kompakt form”,

$$\delta(\nu - \nu') d\mu_{XY}(\nu) = \mathbb{E} \left(dZ_X(\nu) \overline{dZ_Y(\nu')} \right).$$

La oss gå tilbake til situasjonen for Wienerfilteret og anta at X og N har spektralrepresentasjonene

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} dZ_X(\nu), \quad N(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} dZ_N(\nu).$$

Det er også naturlig å anta (i alle fall i en del situasjoner) at støyen ikke avhenger av X . Dette betyr at $X(t)$ og $N(t)$ er *ortogonale*, dvs. $\rho_{XN}(t) = 0 \forall t$, eller ekvivalent at $d\mu_{XN} = 0$.

I praksis er det vanlig at spektralmålene til X og N er absolutt kontinuerlige, det vil si at det fins ikke-negative funksjoner, ϕ_{XX} og ϕ_{NN} slik at $d\mu_X(\nu) = \phi_{XX}(\nu) d\nu$ og $d\mu_N(\nu) = \phi_{NN}(\nu) d\nu$. Som nevnt ovenfor, forutsetter Wienerfilteret at vi kjenner spektrene, med andre ord, ϕ_{XX} og ϕ_{NN} .

Ved hjelp av spektralrepresentasjonene får vi

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} \hat{S}(\nu) dZ_X(\nu) + \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} dZ_N(\nu),$$

og dermed

$$\tilde{X}(t) = W * Y(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} \hat{W}(\nu) \hat{S}(\nu) dZ_X(\nu) + \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} \hat{W}(\nu) dZ_N(\nu).$$

Videre vil $\tilde{X} - X$ få spektralrepresentasjonen

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t) - X(t) &= \int_{\hat{\mathbb{R}}} e^{i\nu t} \left(\hat{W}(\nu) \hat{S}(\nu) - 1 \right) dZ_X(\nu) + \int_{\hat{\mathbb{R}}} e^{i\nu t} \hat{W}(\nu) dZ_N(\nu) \\ &= \int_{\hat{\mathbb{R}}} e^{i\nu t} \left[\left(\hat{W}(\nu) \hat{S}(\nu) - 1 \right) dZ_X(\nu) + \hat{W}(\nu) dZ_N(\nu) \right].\end{aligned}$$

Ved å bruke formelen ovenfor, kan variansen til $\tilde{X} - X$ uttrykkes som

$$\begin{aligned}\text{Var}(\tilde{X} - X) &= \text{Var}(\tilde{X}(0) - X(0)) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\tilde{X}(0) - X(0) \right) \overline{\left(\tilde{X}(0) - X(0) \right)} \right) \\ &= \int_{\hat{\mathbb{R}}^2} \mathbb{E} \left\{ \left[\left(\hat{W}(\nu) \hat{S}(\nu) - 1 \right) dZ_X(\nu) + \hat{W}(\nu) dZ_N(\nu) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \overline{\left[\left(\hat{W}(\nu') \hat{S}(\nu') - 1 \right) dZ_X(\nu') + \hat{W}(\nu') dZ_N(\nu') \right]} \right\} \\ &= \int_{\hat{\mathbb{R}}} \left\{ \left| \hat{W}(\nu) \hat{S}(\nu) - 1 \right|^2 \phi_{XX}(\nu) + \left| \hat{W}(\nu) \right|^2 \phi_{NN}(\nu) \right\} d\nu.\end{aligned}$$

For å minimalisere dette integralet er det nok å minimalisere integranden for hver ν . Dette er et kvadratisk uttrykk i $\hat{W}(\nu)$ og det å finne minimum en regneteknisk øvelse i komplekse tall:

$$\begin{aligned}J(\hat{W}) &= \left| \hat{W} \hat{S} - 1 \right|^2 \phi_{XX} + \left| \hat{W} \right|^2 \phi_{NN} \\ &= \left| \hat{W} \right|^2 \left(\left| \hat{S} \right|^2 \phi_{XX} + \phi_{NN} \right) - 2 \text{Re}(\hat{W} \hat{S}) \phi_{XX} + \phi_{XX}.\end{aligned}$$

Ved å skrive $\hat{W} = \left| \hat{W} \right| e^{i\theta}$, ser vi lett at minimum oppnås for

$$\hat{W}(\nu) = \frac{\overline{\hat{S}(\nu)} \phi_{XX}(\nu)}{\left| \hat{S}(\nu) \right|^2 \phi_{XX}(\nu) + \phi_{NN}(\nu)}.$$

Vi ser videre at der $\phi_{XX}(\nu) \gg \phi_{NN}(\nu)$, vil virkelig $\hat{W}(\nu) \approx 1/\hat{S}(\nu)$, med andre ord, det vi forventet i første omgang.

Wiener-filteret blir dermed definert ved

$$WY(t) = \int_{\hat{\mathbb{R}}} e^{i\nu t} \frac{\overline{\hat{S}(\nu)} \phi_{XX}(\nu)}{\left| \hat{S}(\nu) \right|^2 \phi_{XX}(\nu) + \phi_{NN}(\nu)} dZ_Y(\nu).$$

I praksis vil en beregne WY for et diskret signal ved hjelp av en diskret fouriertransform.

Ofte rapporteres det at Wienerfilteret ikke gir så enormt gode resultater, og det skyldes nok antagelig at forutsetningene med stasjonære signaler, additiv støy og allerede kjente spektra ikke alltid er så godt oppfylt.