# SIF5030/75047 Optimeringsteori, 5 timer

## Ingen hjelpemidler.

**Oppgave1:**

**(a)** Forklar hva som menes med en konveks funksjon, og argumentér for at alle minima til en konveks funksjon på en konveks mengde er globale og samlet i en konveks mengde.

**(b)** Finn alle minima til funksjonen $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2yx - 2y + 2x + 5$.

**(c)** Skisser hvordan en kan utnytte resultatet i (a) og (b) til å finne alle løsningene av

$$\min_{\mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{b}} f(\mathbf{x}),$$

der $f(\mathbf{x}) = f(x,y)$ er funksjonen i (b), $\mathbf{A} \in R^{m\times 2}$, $\mathbf{b} \in R^m$, og vi vet at minst en av løsningene i (b) tilfredsstiller $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.

**Oppgave 2**

**(a)** Skriv opp iterasjonsformelen for *steepest descent* anvendt på problemet

$$\min_x \{x^t Q x - b^t x\},$$

der $Q$ er positiv definitt. Vis at hvis vi starter i et punkt $x_0$ der gradienten $g_0$ tilfeldigvis er parallell med en egenvektor $v$ til $Q$, vil metoden konvergere på én iterasjon.

**(b)** Forklar kort filosofien bak metoder basert på en *trust region*.

**Oppgave 3**

(a) Skriv opp Kuhn-Tuckers teorem. Hvordan forenkles teoremet når føringene er lineære? Sett opp Kuhn-Tuckers ligninger for problemet

$$\begin{aligned} &\min c^t x, \\ &Ax = b, \\ &0 \leq x, \end{aligned}$$

når en bruker $\lambda$ som Lagrangemultiplikatorer for likhetsføringene og $s$ som Lagrangemultiplikatorer for ulikhetsføringene. Vis også at det duale problemet

$$\begin{aligned} &\max_\lambda b^t \lambda, \\ &A^t \lambda \leq c, \end{aligned}$$

leder til de samme ligningene.

(b) Bestem minimumsverdien av

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4$$

når

$$\begin{aligned} x_1 + 0 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 0 + x_4 &= 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

(Vink: Løs det duale problemet grafisk)

**Oppgave 4**

(a) Funksjonalen

$$J(y) = \int_0^T \{(\dot{y}(t) + a)^2 + by(t)\} dt$$

er definert på mengden

$$\mathcal{D} = \{y \in C^2[0, T]; y(0) = 0\}.$$

Vis at $J$ er strikt konveks. Angi også Eulerligningen med randkrav i 0 og $T$ for problemet

$$\min_{y \in \mathcal{D}} J(y).$$

(b) En løper er i stand til å produsere en skyvkraft mot underlaget, men på grunn av indre energitap i kroppen, er skyvkraften en ikke-lineær funksjon av effekten, $W(t)$. Vi skal anta at $u \propto W^{1/2}$, der $u$ er skyvkraft pr. kilo kroppsmasse.

Løperen ønsker å løpe opp en jevnt skrånende bakke med helning $\alpha$ og lengde $L$ på en viss tid $T$ med minst mulig energiforbruk. Løperens hastighet, $y(t)$, er gitt av Newtons lov

$$\dot{y}(t) = u(t) - g_\alpha,$$

der $g_\alpha = g \sin \alpha$. Vi ønsker dermed å minimere $\int_0^T W(t)dt$, dvs.

$$J(y) = \int_0^T u^2(t)dt = \int_0^T (\dot{y}(t) + g_\alpha)^2 \, dt.$$

I tillegg er $y(0) = 0$ og

$$\int_0^T y(t)dt = L.$$

Vis, ved hjelp av resultatet i (a) at den entydige løsningen av problemet er gitt ved

$$y(t) = \left(3\frac{L}{T^2} + \frac{g_\alpha}{2}\right) t - \frac{3}{4T}\left(\frac{2L}{T^2} + g_\alpha\right) t^2.$$

(Vink: Sett opp ligningene og vis at denne løsningen passer)

**Oppgave 5**

En annen løper skal krysse et flatt, åpent område fra $(x_1, 0)$ til $(x_2, 0)$, $x_1 < x_2$, på kortest mulig tid. Det er stri vind, slik at løpshastigheten hans, $v$, er sterkt avhengig av løpsretningen.

**(a)** Vis at hvis han løper slik at $y$ er en entydig funksjon av $x$ mellom $x_1$ og $x_2$, leder dette til

$$\min \int_{x_1}^{x_2} F(y'(x))dx,$$

der

$$F(y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y')},$$

$$y(x_1) = y(x_2) = 0.$$

Finn løsningen når $F''(z)$ er forskjellig fra 0 for alle $z$.

**(b)** Hvordan blir løsningene hvis det blåser så kraftig at det ikke er mulig å løpe mer enn $45^\circ$ opp mot vinden? Anta at vinden blåser i negativ $x$-retning, at $F''(z) > 0$ for $|z| > 1$, og at $F'(z_0) = F'(-z_0) = 0$.