



Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad 73 59 35 36

- Hjelpemidler: - Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

EKSAMEN I FAG 75047 OPTIMERINGSTEORI

Tirsdag 28. mai 1996

Tid: 09.00-14.00

Oppgave 1 Finn maksima og minima til funksjonen

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y$$

når $x, y \geq 0$. Angi (uten bevis) hvilke generelle resultater du benytter.

Oppgave 2 Vi har et problem P som går ut på å minimere $f(\mathbf{x})$ der f er en deriverbar funksjon av $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Det er kjent at $f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ når $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, og vi har allerede en metode (D) som til ethvert punkt \mathbf{x} , som ikke allerede er en løsning, gir oss en retning $D(\mathbf{x}) = \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ slik at $\nabla f \cdot \mathbf{d} < 0$. Utenom mengden av løsninger er funksjonen D kontinuert.

La

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}; f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) = \min_{\beta \geq 0} f(\mathbf{x} + \beta\mathbf{d})\}.$$

- a) Vis at avbildningen fra \mathbf{R}^{2n} til mengder i \mathbf{R}^n definert ved $(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \rightarrow S(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ er lukket når $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$.
- b) Foreslå på grunnlag av det ovenforstående en algoritme for P og vis, ved å anvende det globale konvergensteoremet, at algoritmen vil være globalt konvergent. Gjør kort rede for en metode for å finne punkter i $S(\mathbf{x}, \mathbf{d})$.

Oppgave 3

- a) Bring det lineære optimeringsproblemet

$$\max(-x_1 - x_2)$$

når

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ -x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

over på standard form (Problemet skal ikke løses!)

- b) Hvordan lyder fundamentalteoremet i lineær optimering, hvilken enkel geometrisk egenskap har mengden av mulige løsninger, og hvor finner vi optimale løsninger? Illustrér dette grafisk når
- θ
- gjennomløper intervallet
- $[0, 2\pi)$
- for problemet

$$\min(x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)$$

når

$$\begin{aligned} x &\geq 1 - y \\ y &\leq 2 + x \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

- c) Sett opp det duale problemet til problemet i (b). Hvordan finner vi optimale verdier av objektfunksjonen når vi kjenner løsningen(e) til problemet i (b)?

Oppgave 4

- a) La

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2 \quad \text{der } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad \text{og} \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Vi betrakter problemet

$$\min f(\mathbf{x})$$

når

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

der \mathbf{A} er en $r \times n$ matrise med rang $r < n$. Vis, uten å benytte løsningen i (b), at problemet har en entydig løsning. (Vi minner om at $\mathbf{R}^n = \text{Null}(\mathbf{A}) \oplus \text{Range}(\mathbf{A}^t)$).

b) Sett opp Kuhn-Tuckers ligninger for problemet i (a) og vis at løsningen \mathbf{x}^* er

$$\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^t(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}), \quad \text{der} \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k.$$

Hvordan blir Kuhn-Tuckers ligninger hvis noen av enkeltligningene i føringen erstattes av ulikheter, f.eks. $\mathbf{a}_i^t \mathbf{x} \leq b_i$, $i \in I \subset \{1, 2, \dots, r\}$? Når vil \mathbf{x}^* fremdeles være løsning?

Oppgave 5 En student har besluttet å lese til eksamen i Optimeringsteori på egen hånd. Hvor mye han lærer er avhengig av innsatsen $I(t)$, men siden høy innsats ikke nødvendigvis blir spesielt effektiv, vil hans innlærte stoff, $L(t)$, følge differensialligningen

$$\frac{dL(t)}{dt} = \ln^+(I(t)) - L(t)/\alpha,$$

der $\ln^+(x) = \ln x$ hvis $x > 1$, og 0 ellers. Det er følgelig ingen nytte i en innsats I mindre enn 1. Studenten glemmer tilegnet lærdom med tidskonstant α , og vi antar at denne er lik semesterlengden 1, dvs. $\alpha = 1$. Pensum han skal tilegne seg i tidsrommet fra 0 til 1 er normert til p , og studenten starter uten noen kunnskaper i faget slik at $L(0) = 0$ og $L(1) = p$. Som alle studenter vil han minimalisere innsatsen, dvs. legge opp lesingen slik at

$$J(I) = \int_0^1 I(t) dt$$

blir minst mulig.

a) Vis at problemet kan formuleres som minimering av funksjonale ovenfor under føringen

$$\int_0^1 \ln^+(I(t)) e^{t-1} dt = p$$

Sett opp en utvidet funksjonal ved hjelp av en Lagrangemultiplikator og vis at funksjonale er strikt konveks hvis multiplikatoren har riktig fortegn og $I(t) > 1$.

(Den generelle løsningen til differensialligningen $\frac{dL(t)}{dt} + L(t) = f(t)$ kan uttrykkes som

$$L(t) = C e^{-t} + \int_{\tau=0}^t f(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

- b) Finn en optimal løsning for innsatsen til den *flittige* student som vil studere aktivt ($I(t) > 1$) *hele* semesteret hvis $p > 1/e$, og vis, ved å henvise til setninger i pensum, at denne løsningen er entydig. Vil metoden du bruker føre fram hvis pensum er mindre enn $1/e$?
- c) Hvis pensum er mindre enn 1 ($p < 1$), vil det lønne seg å starte lesingen senere i semesteret. Finn optimal løsning og vis at optimal lesetid, a , da er gitt ved $a = p$.

(Vink: Formulér og løs problemet i (a) for et intervall $[0, a]$).