



Faglig kontakt under eksamen:
Marte Pernille Hatlo 73591698 / 97537854

EKSAMEN I TMA4180 OPTIMERINGSTEORI

Fredag 2. juni 2006

Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler: Rottmanns matematiske formelsamling
Godkjent lommeregner.

Sensur 23. juni 2006.

Oppgave 1 Finn alle minima til funksjonen

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2.$$

Oppgave 2 Definer en *konveks mengde* og en *konveks funksjon* definert på en konveks mengde.

Oppgave 3 Anta at vi skal løse et generelt problem på formen

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

ved hjelp av linjesøk. Du kan anta at en startverdien x_0 og en søkeretning p allerede er gitt. Neste verdi i iterasjonene er gitt ved

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p$$

der α_0 er en *tilnærmet* løsning av minimeringsproblemet

$$\min_{\alpha} \varphi(\alpha) \quad \text{der} \quad \varphi(\alpha) = f(x_0 + \alpha p).$$

- Vis at $\varphi'(\alpha) = \nabla f(x_0 + \alpha p)^T p$.
- Sett opp Wolfe-betingelsene for α_0 , og forklar hva de innebærer.

Lag gjerne en skisse.

Oppgave 4 Betrakt problemet

$$\begin{aligned} & \max \{2x_1 + x_2 + x_3\} \\ \text{slik at} \quad & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Skriv problemet på standard form.
- Forklar hva et basispunkt ("basic feasible point") er, og finn et for problemet over.

Oppgave 5 Gitt problemet

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x) \\ \text{når} \quad & a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

der

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T d$$

Vi antar at G er en symmetrisk positiv definit matrise.

a) Sett opp Karush-Kuhn-Tucker (KKT) betingelsene for problemet (men ikke løs dem).

Anta at x^* er en løsning av KKT-betingelsene. Er x^* i så fall et globalt minimum av (1)?

b) Løs problemet

$$\begin{aligned} & \min \{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2\} \\ \text{når} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ & -2x_1 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Hint: Start med en skisse av det tillatte området og nivåkurvene til $q(x)$.

Resten av oppgaven går ut på å konstruere en iterativ algoritme for å løse det generelle kvadratiske problemet (1).

Gitt et tillatt punkt x_0 . La \mathcal{W} være et gitt sett av *aktive føring*er i x_0 , slik at $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}(x_0)$.

c) Finn en løsning p av det reduserte problemet

$$\begin{aligned} & \min_p q(x_0 + p) \\ \text{når} \quad & a_i^T(x_0 + p) = b_i, \quad i \in \mathcal{W}, \end{aligned}$$

forutsatt at a_i er lineært uavhengige for $i \in \mathcal{W}$.

Hint: Vis først at dette er ekvivalent med å finne minimum av $p^T G p / 2 + p^T (G x_0 + d)$ med føringene $a_i^T p = 0$ for $i \in \mathcal{W}$.

d) Anta at løsningen p fra c) er forskjellig fra 0.

Finn et uttrykk for den største verdien α kan ta, slik at $x_0 + \alpha p$ fortsatt er et tillatt punkt.

Neste verdi i iterasjonskjemaet settes til

$$x_1 = x_0 + \min\{\alpha, 1\} \cdot p.$$

Forklar hvorfor.

e) Utfør *en* iterasjon, dvs. anvend punkt c) og d) på problem (2). Bruk punktet $x_0 = [3/2, 0]^T$ som startverdi. Du kan selv velge \mathcal{W} .

NB! Selv om du ikke har funnet formelle løsninger av det generelle problemet i punkt c) og d), kan det godt være at du kan finne dem på det konkrete problemet (2).

f) Punkt **c)** og **d)** er en del av en “activ set method” for kvadratiske problemer. For å fullføre algoritmen må følgende spørsmål besvares:

- Er x_1 løsningen?
- Hvis ikke, hvordan skal \mathcal{W} velges i neste iterasjon?

Gjør rede for hvordan disse spørsmålene kan besvares.

Oppgave 6 Gitt funksjonalen

$$F(y) = \int_0^1 (2e^x y(x) + y'(x)^2) dx$$

definert på

$$\mathcal{D} = \{y(x) \in C^1[0, 1]; \quad y(0) = 0, y(1) = 1\}$$

a) Vis at $F(y)$ er konveks (eventuelt strengt konveks) på \mathcal{D} .

b) Løs optimeringsproblemet

$$\min_{y \in \mathcal{D}} F(y).$$

c) Løs optimeringsproblemet

$$\min_{y \in \mathcal{D}_1} F(y),$$

der

$$\mathcal{D}_1 = \{y(x) \in C^1[0, 1]; \quad y(0) = 0\}.$$

d) Finn minimum av $F(y)$ på \mathcal{D} dersom det i tillegg kreves at

$$\int_0^1 y(x) dx = 2.$$