Eksamen i TMA4180 Optimeringsteori
Løsningsforslag.

Oppgave 1:

1. ordens betingelse for minima gir oss

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2 \\ 2x_2 - 2x_1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som er oppfylt for når $x_2 = x_1 + 1$. I dette punktet er

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

dvs. $\nabla^2 f(x)$ er positiv semi-definit (egenverdiene er 4 og 0). Dermed er $f(x)$ en konveks funksjon, og linjen $x_2 = x_1 + 1$ utgjør alle minima til funksjonen.

Oppgave 2.

En mengde Ω er konveks dersom: for alle $x, y \in \Omega$ så er $\theta x + (1-\theta)y \in \Omega$ for alle $\theta \in (0,1)$.
En funksjon er konveks på et konvekst sett Ω dersom følgende egenskap er oppfylt: for alle $x, y \in \Omega$ så gjelder

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y), \qquad \text{for alle } \theta \in (0,1).$$

Oppgave 3

- Hvis $x = [x_1, , x_2, \ldots, x_n]^T$ så er $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha p) = f(x_1 + \alpha p_1, \cdots, x_n + \alpha p_n)$, og

$$\varphi'(\alpha) = \frac{\partial f(x_0 + \alpha p)}{\partial x_1} \cdot p_1 + \frac{\partial f(x_0 + \alpha p)}{\partial x_2} \cdot p_2 + \cdots + \frac{\partial f(x_0 + \alpha p)}{\partial x_n} \cdot p_n = \nabla f(x_0 + \alpha p)^T p.$$

- De to Wolfe-betingelsene for skrittlengden α_0 er gitt ved:

  1. $f(x_0 + \alpha_0 p) \leq f(x_0) + c_1 \alpha_0 \nabla f(x_0)^T p.$
  2. $\nabla f(x_0 + \alpha_0 p)^T p \geq c_2 \nabla f(x_0)^T p.$

  hvor $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$er gitte konstanter.

  Den første betingelsen sikrer at et skritt med lengde $\alpha_0$og i retning p reduserer målfunksjonen f tilstrekkelig.
  Den andre betingelsen sikrer at vi ikke velger α_0 for liten. Dessuten, hvis $\varphi'(\alpha)$ er svært negativ, er det et tegn på at vi kan redusere $f(x_0 + \alpha p)$ vesentlig ved å øke α. Denne situasjonen unngås ved betingelse 2. For figurer, se Nocedal & Wright, s. 38-40.

Oppgave 4.

a) Et lineært problem på standard for er gitt ved

$$\begin{aligned} &\min c^T x, \\ \text{slik at} \quad &Ax = b, \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

Vi endrer $\max$ til $\min$ og innfører slakk-variable $y_{1,}y_2$ og y_3, slik at problemet på standard form blir

$$\begin{aligned} &\min\{-2x_1 - x_2 - x_3\} \\ \text{slik at}\quad & x_1 + x_3 + y_1 = 1 \\ & x_2 + x_3 + y_2 = 2 \\ & x_1 + x_2 + y_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Ta utgangspunkt i et generelt lineært problem, der det tillatte området er gitt på formen

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

der A er en $m \times n$ matrise, med $m \leq n$. Et tillatt punkt x er en vektor som oppfyller betingelsene over (selvfølgelig), og som i tillegg har maksimalt m elementer forskjellig fra 0. (Hvis det har færre enn m elementer forskjellig fra 0 sier vi at x er et degenerert basispunkt). For et tillatt basispunkt x skal følgende gjelde: Det skal være mulig å finne et index-sett $\mathcal{B}(x) \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ slik at

- $\mathcal{B}(x)$ inneholder nøyaktig m elementer.
- Hvis $i \notin \mathcal{B}(x)$ så er $x_i = 0$.
- $m \times m$ matrisa definert ved $B = [A_i]_{i \in \mathcal{B}(x)}$ er inverterbar. A_i er kolonne nr. i i A.

For problemet i oppgave **b)** kan et passende basispunkt være

$$x = [0, 0, 0, 1, 2, 3]^T .$$

Oppgave 5.

a) Lagrange-funksjonen er gitt ved

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = q(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i^T x - b_i)$$

og for et *tillatt punkt* x er KKT-betingelsene er gitt ved

$$\begin{aligned} Gx + d &= \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i && (1) \\ \lambda_i (a_i^T x - b_i) &= 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ \lambda_i &\geq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

Et punkt $x^\star$ som tilfredsstiller disse betingelsene kalles et KKT-punkt. Siden G er symmetrisk positiv definitt er $q(x)$ strengt konveks. Området $\Omega = \{x : a_i^T x - b_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ er konvekst siden alle føringene er lineære. Dermed vil et KKT-punkt $x^\star$være et globalt minimum.

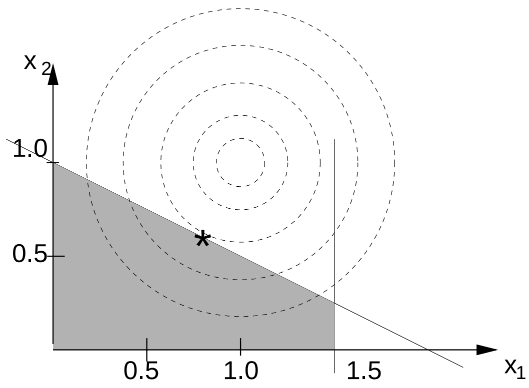
b) Problemet er gitt ved

$$\min\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

med føringene

$$
\begin{array}{lrl}
i) & -x_1 - 2x_2 & \geq -2 \\
ii) & -2x_1 & \geq -3 \\
iii) & x_1 & \geq 0 \\
iv) & x_2 & \geq 0.
\end{array} \tag{2}
$$

En skisse av problemet er gitt under.



Minimum av $q(x)$ ligger utenfor det tillatte (skraverte) området. Det er klart at minimum må ligge på føringen gitt av $-x_1 - 2x_2 \geq -2$. Føringene $-2x_1 \geq -3$ og $x_1, x_2 \geq 0$ er passive, slik at $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. KKT-betingelsene blir da

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2 &= -\lambda_1 \\
2x_2 - 2 &= -2\lambda_1 \\
-x_1 - x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

med løsningen

$$
x_1 = \frac{4}{5},\ x_2 = \frac{3}{5},\ \lambda_1 = \frac{2}{5},\ \lambda_2 = \lambda = \lambda_4 0.
$$

c) G er symmetrisk, slik at

$$
\begin{aligned}
q(x_0 + p) &= \frac{1}{2}(x_0 + p)^T G (x_0 + p) + (x_0 + p)^T d \\
&= \frac{1}{2} p^T G p + p^T (G x_0 + d) + \frac{1}{2} x_0 G x_0 + x_0^T p \\
&= \frac{1}{2} p^T G p + p^T \tilde{d} + q(x_0).
\end{aligned}
$$

med $\tilde{d} = G x_0 + d$. $q(x_0)$ er konstant, og vil ikke påvirke løsningen p av optimeringsproblemet. Føringene er gitt av

$$
a_i^T (x_0 + p) = b_i, \qquad i \in \mathcal{W}.
$$

Alle føringene i $\mathcal{W}$ er aktive i x_0, slik at $a_i^T x_0 = b_i$. Vårt reduserte problem kan dermed reduseres ytterligere til

$$
\min_p \left\{ \frac{1}{2} p^T G p + p^T \tilde{d} \right\} \tag{3}
$$

når

$$
A_{\mathcal{W}} p = 0
$$

der $A_{\mathcal{W}}$ er en matrise med radene a_i^T, $i \in \mathcal{W}$. Siden a_i er lineært uavhengige vil $A_{\mathcal{W}}$ ha full rang. Vi kan nå fortsette på en av to måter:

Alternativ a). KKT-betingelsene for det reduserte problemet blir

$$\begin{aligned} Gp + \tilde{d} &= \sum_{i \in \mathcal{W}} a_i \lambda_i = A_{\mathcal{W}}^T \lambda_{\mathcal{W}}, \\ A_{\mathcal{W}} p &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

hvor $\lambda_{\mathcal{W}} = [\lambda_i]_{i \in \mathcal{W}}$. G er symmetrisk positiv definitt og dermed inverterbar, slik at

$$p = G^{-1}(A_{\mathcal{W}}^T \lambda_{\mathcal{W}} - \tilde{d}).$$

Setter vi dette inn i ligningen for føringene får vi

$$A_{\mathcal{W}} p = A_{\mathcal{W}} G^{-1}(A_{\mathcal{W}}^T \lambda_{\mathcal{W}} - \tilde{d}) = 0$$

Matrisa $A_{\mathcal{W}}$ har full rang, dermed er matrisa $A_{\mathcal{W}} G^{-1} A_{\mathcal{W}}^T$ inverterbar og siste ligning kan løses mhp. $\lambda_{\mathcal{W}}$. Settes dette igjen inn i uttrykket for p får vi:

$$\lambda_{\mathcal{W}} = (A_{\mathcal{W}} G^{-1} A_{\mathcal{W}}^T)^{-1} A_{\mathcal{W}} G^{-1} \tilde{d}, \qquad p = \left(G^{-1} A_{\mathcal{W}}^T (A_{\mathcal{W}} G^{-1} A_{\mathcal{W}}^T)^{-1} A_{\mathcal{W}} G^{-1} - G^{-1} \right) \tilde{d}. \tag{5}$$

Alternativ b). Søkeretningen p må ligge i nullrommet til $A_{\mathcal{W}}$. La Z være en basis for nullrommet til $A_{\mathcal{W}}$, slik at alle tillatte søkeretninger p skrives som $p = Zu$, hvor $u \in \mathbb{R}^{n-m_{\mathcal{W}}}$ og $m_{\mathcal{W}}$er antall føringer i $\mathcal{W}$. Vi kan dermed definere en ny funksjon

$$f(u) = \frac{1}{2}(Zu)^T G (Zu) + (Zu)^T \tilde{d},$$

og vi har fått et kvadratisk minimeringsproblem i u uten føringer, $\min_u f(u)$, som har løsningen

$$u = -\tilde{G}^{-1} Z^T \tilde{d}.$$

Matrisa $\tilde{G} = Z^T G Z$ er SPD siden Z har full rang og G er SPD. Søkeretningen er nå gitt av

$$p = -Z \tilde{G}^{-1} Z^T \tilde{d}.$$

De tilhørende Lagrange-multiplikatorene kan vi finne ved å sette $\lambda_i = 0$ for alle $i \notin \mathcal{W}$, og løse de resterende fra (4).

d) La $\mathcal{E} = \{1, 2, \cdots, m\}$, og sett $x_\alpha = x_0 + \alpha p$. Da vil $a_i^T x_\alpha = b_i$ for alle $i \in \mathcal{W}$, dvs. at alle føringene i $\mathcal{W}$ er aktive, og dermed oppfylt, for alle α. For at $x_\alpha$skal være et tillatt punkt, alle føringene tatt i betraktning, må

$$a_i^T (x_0 + \alpha p) \geq b_i, \qquad \text{for alle} \quad i \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{W}.$$

La

$$\alpha_i = \frac{b_i - a_i^T x_0}{a_i^T p}, \qquad \bar{\alpha} = \min_{i \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{W}} \alpha_i. \tag{6}$$

Så lenge $\alpha \leq \bar{\alpha}$, vil altså $x_0 + \alpha p$ være et tillatt punkt. Dermed er to situasjoner mulige:

- Hvis $\bar{\alpha} \geq 1$ så ligger minimum av det reduserte problemet fra punkt **b)**, $x_1 = x_0 + p$ innenfor det tillatte området. Da bruker vi denne verdien.
- Hvis $\bar{\alpha} < 1$ når vi randa av det tillatte området før vi når minimum av det reduserte området. I så fall velger vi $x_1 = x_0 + \bar{\alpha} p$.

e) Skriv om den kvadratiske funksjonen

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=\frac{1}{2}x^T\left[\begin{array}{cc}2&0\\0&2\end{array}\right]x+x^T\left[\begin{array}{c}-2\\-2\end{array}\right]+1,$$

der $x=[x_1,x_2]^T$. Så $G=2I$, og $d=[-2,-2]^T$. La $x_0=[3/2,0]^T$, slik at

$$\tilde{d}=2x_0+d=\left[\begin{array}{c}1\\-2\end{array}\right].$$

I x_0 er det 2 aktive føringer, $ii)$ og $vi)$ fra (2). Vi kan altså velge $\mathcal{W}$ til å omfatte en av disse, begge eller ingen. I det etterfølgende er alternativ **b)** valgt for å finne p.

Velg f.eks. $\mathcal{W}=\{iv)\}$, slik at $A_{\mathcal{W}}=[0,1]$. Da er $Z=[1,0]^T$, og vi får

$$\begin{aligned}\tilde{G}&=Z^TGZ=2, \qquad \tilde{G}^{-1}=\frac{1}{2}.\\ u&=-\tilde{G}Z^Td=-\frac{1}{2}.\\ p&=Zu=\left[\begin{array}{c}-\frac{1}{2}\\0\end{array}\right].\end{aligned}$$

Punktet $x_0+p=[1,0]^T$ ligger i det tillatte området (sjekk det), så vi setter

$$x_1=[1,0]^T.$$

Alternativt kunne vi velge $\mathcal{W}=\{ii)\}$, slik at $A_{\mathcal{W}}=[-2,0]$ med nullrom spent ut av $Z=[0,1]^T$, og

$$\tilde{G}=2, \qquad u=1, \qquad p=Z=[0,1]^T.$$

Men $x_0+p=\left[\frac{3}{2},1\right]$ ligger utenfor det tillatte området, føring $i)$ er ikke oppfyllt her. Skrittlengden $\bar{\alpha}$ regner vi ut fra (6). Fra figuren ser vi at det bare er nødvendig å sjekke føring $i)$, de andre vil alle være oppfyllt når vi beveger oss rett oppover fra x_0. Vi får dermed:

$$\bar{\alpha}=\alpha_1=\frac{-2-[-1,-2]\left[\frac{3}{2},0\right]^T}{[-1,-2]\,[0,1]^T}=\frac{1}{4},$$

og

$$x_1=x_0+\bar{\alpha}p=\left[\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$$

Hvis $\mathcal{W}=\{\emptyset\}$så vil $p=\left[-\frac{1}{2},1\right]^T$, $\bar{\alpha}=\frac{1}{3}$ og $x_1=\left[\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right]$.

Hvis $\mathcal{W}=\{ii),iv)\}$ så vil $p=[0,0]^T$.

f)

- Anta først at $x_1=x_0+p$, dvs. at løsningen av det reduserte problemet er et tillatt punkt. Anta at de tilhørende Lagrange-mulitplikatorene er funnet. Dersom $\lambda_i\geq 0$ for alle $i\in\mathcal{W}$ og $\lambda_i=0$ for alle $i\notin\mathcal{W}$, så er KKT-betingelsene for det generelle problemet oppfyllt, og x_1 er vårt globale minimum.
  Hvis $\lambda_i<0$ for en eller flere $i\in\mathcal{W}$, så fjerner vi den føringen som korresponderer til den

største negative verdien av λ. Dette danner da et nytt sett med aktive føringer som brukes til neste iterasjon.

*(Dette er ikke en del av en besvarelsen:
Gå tilbake til punkt **e)**, og la $\mathcal{W} = \{iv)\}$, slik at $x_1 = [1,0]^T$. La $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, og finn $\lambda_4$fra* (1)*, dvs. $\lambda_4 = -2$. Vi kan dermed konkludere med at x_1 ikke er et KKT-punkt, føringen $iv)$ fjernes fra $\mathcal{W}$.)*

- Hvis $x_1 = x_0 + \bar{\alpha}p$, med $\bar{\alpha} < 1$, så betyr det at en ny føring blir aktiv. Denne inkluderer vi i $\mathcal{W}$.

Se for øvrig algoritme 16.1 i Nocedal & Wright.

Oppgave 6.

a) Vi undersøker om $f(x,y,z) = 2e^x y + z^2$ er sterkt konveks i $S \subseteq \mathbb{R}^3$ etter definisjon (3.4) i Troutman, dvs. om:

$$f(x, y+v, z+w) - f(x,y,z) \geq f_y(x,y,z)v + f_z(x,y,z)w, \quad \forall (x,y,z) \text{ and } (x, y+v, z+w) \in S$$

med $=$ bare hvis $v = 0$ eller $w = 0$. I vårt tilfelle er $f_y = 2e^x$ og $f_z = 2z$, og

$$\begin{aligned} f(x, y+v, z+w) - f(x,y,z) &= 2e^x(y+v) + (z+w)^2 - 2e^x y - z^2 \\ &= 2e^x v + 2zw + w^2 \\ &\geq 2e^x v + 2zw, \qquad \text{for alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

med likhet hvis og bare hvis $w = 0$. Så f er sterkt konveks, og dermed er $F(y)$ strengt konveks på $\mathcal{D}$ (Teorem 3.5).
Alternativt kunne en skrive

$$F(y) = \int_0^1 2e^x y(x)dx + \int_0^1 y'(x)^2 dx.$$

Det siste integralet er en strengt konvekst på $\mathcal{D}$ (hvorfor?), det første er lineært i y og dermed konvekst (men ikke strengt konvekst). Summen av en konveks og en strengt konveks funksjonal blir en strengt konveks funksjonal.
Det er også mulig å bruke definisjon (3.1) i Troutman direkte.

(Før vi løser de siste oppgavene, la oss som neste skritt utlede Euler-Lagrange-ligningene: Gitt funksjonalen $F(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx$. Den Gateaux -deriverte av $F(y)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \delta F(y;v) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y+\varepsilon v, y' + \varepsilon v')|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left(f_y(x,y,y')v + f_z(x,y,y')v' \right) dx \\ \textit{(Delvis integrasjon)} \qquad &= \int_a^b \left(f_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} f_z(x,y,y') \right) v dx + |_a^b f_z(x,y,y')v \end{aligned}$$

Dette forutsetter at f er tilstrekkelig glatt til at derivasjonen med hensyn på ε kan flyttes innenfor integrasjonen. I så fall er $\delta F(y;v) = 0$ for alle $y, v + y \in \mathcal{D}$ hvis

$$\frac{d}{dx} f_z(x,y,y') = f_y(x,y,y'), \qquad f_z(a, y(a), y'(a))v(a) = 0 \quad \textit{og} \quad f_z(b, y(b), y'(b))v(b) = 0. \qquad (7)$$

Den første ligningen er Euler-Lagrange ligningen, de to andre er randbetingelser.)

b) Euler-Lagrange ligningen blir

$$\frac{d}{dx}2y' = 2e^x \quad \text{som blir} \quad y'' = e^x, \quad \text{med løsning} \quad y(x) = e^x + C_1 x + C_2 \tag{8}$$

der C_1 og C_2 er konstanter som må bestemmes fra randbetingelsene. I dette tilfellet ser vi at $y, v + y \in \mathcal{D}$ bare hvis $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ og $v(0) = v(1) = 0$. De to randbetingelsene i (7) automatisk er oppfyllt, C_1og C_2bestemmes fra randbetingelsene for y. Resultatet blir:

$$y(x) = e^x + (2 - e)x - 1.$$

c) Euler-Lagrange ligningen er som før, med løsning gitt i (8). De to konstantene blir nå bestemt av randbetingelsen $y(0) = 0$ og $f_z(1, y(1), y'(1)) = 2y'(1) = 0$, den siste betingelsen kommer fra (7). Dette resulterer i løsningen

$$y(x) = e^x - ex - 1.$$

d) Vi ser nå på den utvidede funksjonalen

$$\tilde{F}(y) = \int_0^1 \left(2e^x y + y'^2\right) dx + \lambda \int_0^1 y dx.$$

der λ er en (foreløbig) ukjent konstant. Siden det siste integralet er lineært i y, vil også $\tilde{F}$ være strengt konveks på $\mathcal{D}$. Euler-Lagrange ligningen blir:

$$y'' = e^x + \frac{1}{2}\lambda \qquad \text{med løsning} \qquad y(x) = e^x + \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Med randbetingelsene $y(0) = 0$ og $y(1) = 1$ blir løsningen

$$y(x) = e^x + \frac{\lambda}{4}x^2 + (2 - e - \lambda)x - 1.$$

Konstanten λ bestemmes av tilleggsbetingelsen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(x)dx &= \int_0^1 \left(e^x + \frac{\lambda}{4}x + (2 - e - \lambda)x - 1\right) dx \\
&= |_0^1 e^x + \frac{\lambda}{12}x + \frac{1}{2}(2 - e - \frac{\lambda}{4})x^2 - x \\
&= e - 1 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{2}(2 - e - \lambda) - 1 = 2
\end{aligned}$$

som har løsningen $\lambda = 12e - 72$. Løsningen $y(x)$ er dermed gitt av

$$y(x) = e^x + (3e - 18)x^2 + (20 - 4e)x - 1.$$