Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Helge Holden tlf. (735)93514

EKSAMEN I TMA4170 Fourieranalyse

Bokmål
Tirsdag 12. desember 2006
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Ett A4-ark stemplet av Institutt for matematiske fag.
På dette arket kan studenten skrive det vedkommende vil.

Sensurdato: 12. januar 2007

Oppgave 1

a) La $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ og $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ være periodiske følger med periode N. Definer (diskret) konvolusjon ved $z = x * y$ der $z = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ og

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vis at da gjelder

$$Z_n = N X_n Y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

der

$$X = \mathcal{F}_N x, \quad Y = \mathcal{F}_N y, \quad Z = \mathcal{F}_N z,$$

der $\mathcal{F}_N$ betegner den diskrete Fourier-transformen.

b) Forklar hvordan man kan benytte "Fast Fourier Transform" til å beregne diskret konvolusjon hurtig.

Oppgave 2

a) Bruk Lebesgues dominertkonvergensteorem til å vise at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{n\sin(x/n)}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Oppgave 3

a) La f_n være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hvorfor definerer f_n en temperert distribusjon?

b) Vis at f_n som distribusjon konvergerer mot Diracs deltafunksjon, $\delta(\phi) = \phi(0)$, når $n \to \infty$.

c) Hva vil den Fourier-transformerte av f_n konvergere mot når $n \to \infty$?

Oppgave 4

a) Betrakt filteret $A\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ (der $\mathcal{S}'$ er rommet av tempererte distribusjoner) gitt ved $A(f) = g$ der

$$g^{(2)} - 2\omega g^{(1)} + \omega^2 g = f^{(3)} - 2\omega f^{(2)} + (\omega^2+1)f^{(1)} + (1-\omega)f.$$

Vi antar at $\mathrm{Re}(\omega) \neq 0$. Bestem H slik at $\hat{g}(\lambda) = H(\lambda)\hat{f}(\lambda)$.

b) Skriv filteret på formen $g = A(f) = h * f$, og bestem h. (Hint: Det kan være nyttig å vite at $x^3 - 2\omega x^2 + (\omega^2+1)x + (1-\omega) = (x-\omega)^2 x + (x-\omega) + 1$.)

c) Finn en betingelse på ω slik at filteret er realiserbart (kausalt).

Noen nyttige formler

$$
\begin{aligned}
Y_n = (\mathcal{F}_N y)_n &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega_N = e^{2\pi i/N},\\
y_k = (\mathcal{F}_N^{-1} Y)_k &= \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk}, \quad k \in \mathbb{Z},\\
\hat{f}(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t/a}, \qquad f(a+t) = f(t),\\
c_n &= \frac{1}{a}\int_0^a f(t) e^{-2\pi i n t/a}\, dt, \qquad n \in \mathbb{Z},\\
\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx,\\
\mathcal{F}^{-1}(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.
\end{aligned}
$$