Løsningsforslag for TMA4170
12. desember 2006

Oppgave 1
(a) Se Teorem 8.2.3 s. 69f i læreboken.
(b) Direkte beregning av konvolusjon ved bruk av definisjonen gir i størrelsesorden N^2 komplekse multiplikasjoner og N^2 komplekse addisjoner. Dersom man istedenfor først bruker diskret Fourier transform ved hjelp av FFT (orden $N \log_2 N$ multiplikasjoner og addisjoner), deretter benytter konvolusjonsteoremet (orden N), og tilslutt regner den inverse Fourier-transformen v.h.a. FFT (igjen orden $N \log_2 N$ multiplikasjoner og addisjoner), har man redusert problemet fra orden N^2 til orden $N \log_2 N$ operasjoner. Se læreboken s. 85f.

Oppgave 2
Vi har at

$$\frac{\sin x}{n \sin(x/n)} = \frac{\sin x}{x} \frac{(x/n)}{\sin(x/n)} \to \frac{\sin x}{x} \text{ når } n \to \infty$$

for alle $x \neq 0$. Videre er

$$\left| \frac{\sin(x/n)}{(x/n)} \right| \geq \frac{1}{2}$$

for store n og $x \in [0, \pi]$ siden

$$\frac{\sin(x/n)}{(x/n)} \to 1 \text{ når } n \to \infty.$$

Dermed

$$\left| \frac{\sin x}{n \sin(x/n)} \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \frac{(x/n)}{\sin(x/n)} \right| \leq 2 \left| \frac{\sin x}{x} \right| \in L^1(0, \pi).$$

Utsagnet følger nå fra Lebesgues dominertkonvergensteorem.

Oppgave 3
(a) f_n er svakt voksende (se s. 285 i læreboken) og definerer en temperert distribusjon.
(b) Vi har at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = 1$$

for alle n. Videre

$$\begin{aligned} \langle f_n, \phi \rangle - \langle \delta, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x)\, dx - \phi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)(\phi(x) - \phi(0))\, dx. \end{aligned}$$

Gitt $\epsilon > 0$, fins $\delta > 0$ slik at $|\phi(x) - \phi(0)| < \epsilon$ når $|x| \leq \delta$. Dermed

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, \phi\rangle - \langle \delta, \phi\rangle| &\leq \int_{|x|<\delta} |f_n(x)(\phi(x) - \phi(0))|\,dx + \int_{|x|\geq\delta} |f_n(x)(\phi(x) - \phi(0))|\,dx \\
&\leq \epsilon \int_{|x|<\delta} |f_n(x)|\,dx + 2\|\phi\|_\infty \int_{|x|\geq\delta} |f_n(x)|\,dx \\
&\leq \epsilon + 2\|\phi\|_\infty \int_{|y|\geq n\delta} \frac{1}{1+y^2}\,dy \\
&\leq \epsilon + \epsilon
\end{aligned}$$

ved å velge n stor nok.
(c) Siden Fourier-transformen er kontinuerlig på de tempererte distribusjonene, vil $f_n \to \delta$ medføre at $\hat{f}_n \to \hat{\delta} = 1$.

Oppgave 3
(a) Ved å ta Fourier-transformen på begge sider får vi

$$Q(2\pi i\lambda)\hat{g}(\lambda) = P(2\pi i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

der

$$Q(x) = (x-\omega)^2, \quad P(x) = x^3 - 2\omega x^2 + (\omega^2+1)x + (1-\omega).$$

Dermed

$$H(\lambda) = \frac{P(2\pi i\lambda)}{Q(2\pi i\lambda)}.$$

(b) Delbrøksoppspaltning gir

$$H(\lambda) = 2\pi i\lambda + \frac{1}{2\pi i\lambda - \omega} + \frac{1}{(2\pi i\lambda - \omega)^2}$$

siden

$$P(x) = x^3 - 2\omega x^2 + (\omega^2+1)x + (1-\omega) = (x-\omega)^2 x + (x-\omega) + 1.$$

Teorien i læreboken (s. 322f) gir at

$$h(t) = \delta + \begin{cases} (1+t)e^{\omega t}u(t) & \text{hvis } \mathrm{Re}(\omega) < 0, \\ -(1+t)e^{\omega t}u(-t) & \text{hvis } \mathrm{Re}(\omega) > 0. \end{cases}$$

(c) Ifølge Proposisjon 34.3.4 (s. 324) er filteret realiserbart hvis og bare hvis $\mathrm{Re}(\omega) < 0$.