Viskositetsløsninger av Hamilton-Jacobi ligninger

Grunnleggende begreper og numeriske teknikker.

Seminaret vil gjennomgå litt grunnleggende teori for Hamilton-Jacobi ligninger. Vi tar utgangspunkt i begrepet viskositetløsninger lansert av Crandall og Lions. Dette begrepet er analogt til entropiløsningsbegrepet for konserveringslover og viser seg å være svært fruktbart for en stor klasse av partielle differensialligninger. Den typiske ligningen vi skal studere kan skrives som

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0,$$

der $x \in \mathbf{R}^n$, og den ukjente funksjonen $u = u(x)$ er en skalar funksjon. Her kan F være en lineær eller ikkelineær funksjon. Denne klassen av problemer omfatter modeller fra kontrollteori (også stokastisk), minimalflater, bildeanalyse, og frontbevegelse, for bare å nevne noen få anvendelser. I tillegg er lineære parabolske og elliptiske ligninger spesialtilfeller.

Den første delen av seminaret skal omhandle eksistens og entydighet av løsninger til slike problemer. Vi skal også betrakte (spesialtilfellene) "hyperbolske" og "parabolske" ligninger

$$u_t + F(x, t, u, Du) = 0, \quad \text{og} \quad u_t + F(x, t, u, Du, D^2u) = 0.$$

Den andre delen av seminaret vil ta for seg noe av teorien for numeriske metoder for Hamilton-Jacobi ligninger. Her finnes det endel teori for såkalt monotone metoder (denne teorien er analog til teorien for monotone metoder for skalare konserveringslover). Etter dette skal vi studere noen spesielle metoder så som "level-set" og "fast-marching", basert på arbeider av Osher og Sethian.