Time series models 2007: Computer exercise III

Deadline: Tuesday 13 November

October 29, 2007

A report on this computer exercise should be delivered to Håvard Rue, no later than Tuesday 13 November (unless otherwise agreed upon). Email-submissions is accepted. The assumed program to use is R (see www.r-project.org). Groups no larger than 2, is accepted.

Oppgave 1

Anta følgende skalare state-space-modell

$$x_t = \phi x_{t-1} + v_t, \qquad v_t \sim N(0,1), \tag{1}$$

$$y_t = x_t + w_t, \qquad w_t \sim N(0,\sigma^2). \tag{2}$$

1. Finn ved analytisk regning uttrykk for stasjonærløsningen for $\mu_{t|t}$ og $\Omega_{t|t}$.

2. Finn ved analytisk regning uttrykk for stasjonærløsningen for $\mu_{t|t-1}$ og $\Omega_{t|t-1}$.

3. Velg passende verdier for ϕ, σ^2 og n og benytt Kalmanfilteret til å verifisere numerisk løsningene du fant i punkt 1 og 2.

4. Velg noen passende verdier for (ϕ,σ^2,n), simuler fra modellen over og estimer (ϕ,σ^2) ved maximum likelihood fra de simulerte y-verdiene. **Hint: det er tilstrekkelig å evaluere log-likelihooden for (ϕ,σ^2) i ett grid omkring de sanne verdiene, og finne maksimum på denne måten.**

5. For ett av de simulerte datasettene i punkt 4, kjør prognose (med usikkerhetsanslag) 10 tidssteg frem i tid. Vis resultatet i et plott.

Oppgave 2

På fila «http://www.math.ntnu.no/~hrue/TMA4285/oving3-data.dat» finnes observerte verdier for posisjon (kolonne 1), hastighet (kolonne 2) og akselerasjon (kolonne 3) for tid $t = 1, 2, \ldots, 1000$. Observasjon av hastighet og akselerasjon er gjort ved alle 1000 tidspunktene, mens posisjon kun er observert hvert femtiende tidspunkt, dvs. for $t = 50, 100, 150, \ldots, 1000$. Merk at det i fila er satt inn 0 i første kolonne for tidspunkt hvor observasjon av posisjon mangler. Målefeilene for posisjon, hastighet og akselerasjon er uavhengige av hverandre og har varianser 10^2 (posisjon), 0.15^2 (hastighet) og 0.001^2. Det kan også betraktes som kjent at posisjon, hastighet og akselerasjon ved tid $t = 1$ er uavhengige av hverandre og normalfordelt med forventning lik 0 og med varianser 100^2 (posisjon), 0.2^2 (hastighet) og 0.01^2 (akselerasjon).

1. Hvilke fysiske lover gjelder for sammenhengen mellom posisjon, hastighet og akselerasjon som funksjon av tid t? Lag også plott av de observerte verdier for posisjon, hastighet og akselerasjon.

2. Foreslå en rimelig Gaussisk modell for posisjon, hastighet og akselerasjon for de diskrete tidspunktene $t = 1, 2, \ldots, 1000$.

3. Formuler modellen fra forrige punkt som en state-space-modell. Spesifiser spesielt hvilke parametre du vil betrakte som kjente (og hvilke verdier disse har) og hvilke parametre du vil estimere fra observerte data.

4. Estimer ukjente parametre i state-space-modellen ved maximum likelihood. (**Hint: et gridsøk er ok**.)

5. Med parameterverdier som estimert i forrige punkt, bruk kalmanfilteret på de observerte data. Visualiser ditt resultat ved å plotte opp filtrerte verdier for posisjon og hastighet sammen med tilhørende 95%-konfindensgrenser.

6. Bruk glattingsrekursjonene til også å finne glattingsestimatene for de observerte data. Visualiser igjen ditt resultat ved å plotte opp glattingsestimatene for posisjon og hastighet sammen med tilhørende 95%-konfidensgrenser.

7. Undersøk hvor mye informasjon som ligger i observert akselerasjon ved å sammenligne med hvordan glattingsestimatene for posisjon og hastighet blir hvis du ikke benytter oberverte akselerasjonsverdier.