Løsningsforslag øving 7, ST1301

Oppgave 1 Lag en funksjon som simulerer eksponentielt fordelte variable ved hjelp av inversjonsmetoden.

Oppgave 2 Anta at $t_1, t_2, \ldots, t_n$ er uavhengige gammafordelte variable. Beregn sannsynlighetsmaksimeringsestimatene av parameterne λ og r ved hjelp av funkjonen `optim`. Bruk samme data som i øving 6.

```
logL <- function(p,t) {
  -sum(dgamma(t,rate=p[1],shape=p[2],log=T))
}

> t <- scan("spurv.dat")
Read 870 items
> optim(c(1,1),logL,t=t)
$par
[1] 1.073416 1.751976

$value
[1] 1226.721

$counts
function gradient
      73       NA

$convergence
[1] 0

$message
NULL
```

Oppgave 3 *Beregne teststyrke ved å simulere. Hvordan påvirkes teststyrken av a priori kunnskap.*

Anta at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er et tilfeldig utvalg med størrelse $n = 5$ fra normalfordelingen med parametere μ og σ^2. Anta at en forsker ønsker å teste nullhypotesen $H_0 : \mu = 0$ mot alternativ hypotese $H_1 : \mu \geq 0$.

Anta først at forskeren vet at variansen er lik $\sigma^2 = 1$. Hvilken testobservator skal forskeren da bruke? Hva blir kritisk verdi dersom vi velger $\alpha = 0.05$

som signifikansnivå? Finn så teststyrken til testen ved å simulere fordelingen til testobservatoren under H_1 med μ valgt lik 0.5.

Hva slags testobservator skal forskeren bruke dersom hun ikke kjenner σ^2? Hva blir kritisk verdi? Finn teststyrken i dette tilfelle under antakelsen at $\sigma^2 = 1$ og $\mu = 0.5$, ved å simulere fordelingen til testobservatoren under H_1.

Hvordan påvirker forskerens kunnskap om σ^2 teststyrken? Virker dette rimelig?

Lag et histogram av fordelingen til testobservatoren under H_1. Fordelingen kalles ikke-sentral Student t-fordeling.

Kjent varians $\sigma^2 = 1$: I dette tilfelle vil testobservatoren

$$Z = \frac{\bar{X} - 0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

være standard normalfordelt slik at kritisk verdi blir $z^* = z_\alpha = 1.64$. Følgende funksjon simulerer 1000 realisasjoner av Z under H_1:

```
zsim <- function(mu=0.5,sigma2=1,nsim=1000,n=5) {
  z <- rep(NA,nsim)
  for (i in 1:nsim) {
    x <- rnorm(n,mean=mu,sd=sqrt(sigma2))
    z[i] <- mean(x)/sqrt(sigma2/n)
  }
  return(z)
}
```

Teststyrken for $\mu = 0.5$ kan beregnes slik:

```
> mean(zsim()>1.64)
[1] 0.296
```

Hvis σ^2 er ukjent må forskeren bruke testobservatoren

$$T = \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}, \tag{2}$$

som er Student t-fordelt med $n-1$ frihetsgrader. Kritisk verdi blir $t_{\alpha,n-1} = 2.13$. Følgende funksjon simulerer fordelingen til T under alternativ hypotese:

```
tsim <- function(mu=0.5,sigma2=1,nsim=1000,n=5) {
  t <- rep(NA,nsim)
  for (i in 1:nsim) {
    x <- rnorm(n,mean=mu,sd=sqrt(sigma2))
    t[i] <- mean(x)/(sd(x)/sqrt(n)) # S beregnes v.h.a. sd
  }
  return(t)
}
```

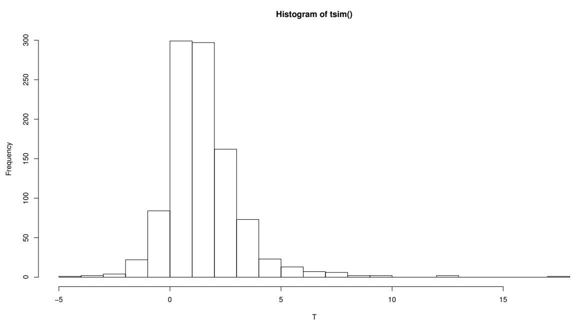
For $\mu = 0.5$ blir teststyrken blir

```
> mean(tsim()>2.13)
[1] 0.242
```

altså betydelig mindre enn teststyrken vi får dersom vi kjenner σ^2. Dette virker rimelig — med mer a priori kunnskap er det mer sannsynlig at vi greier å forkaste H_0 til fordel for H_1 dersom H_1 er sann (og mindre sannsynlig at vi feilaktig aksepterer H_0).

Histogrammet over fordelingen til T (ikke-sentral t-fordeling):

```
> hist(tsim(),breaks=20,xlab="T")
```



Oppgave 4 *Utvalgsstørrelse og teststyrke*

I følge Persi Diaconis, professor i matematikk og statistikk ved Stanford (referert i Dagbladet 6. mars. [1]) er utfallene i myntkastserier ikke tilfeldige. Det blir påstått at sannsynligheten for at utfallet i et gitt myntkast er lik resultatet i forrige kast er $p = 0.51$ (H_1).

Videre påstås det at en må kaste kron og mynt 10000 ganger for å påvise en slik grad av "ikke-tilfeldighet".

La Bernoullivariablene $W_1, W_2, \ldots, W_{n+1}$ representere utfallet av myntkastserien. La $I(A)$ være en indikatorvariabel som tar verdi 1 når hendelsen

[1] http://www.dagbladet.no/kunnskap/2004/03/05/392621.html

A inntreffer og 0 ellers.

Definer $Y_i = I(\{W_i = W_{i+1}\})$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ og la $X = \sum Y_i$, altså antall kast med samme utfall som i forrige kast. Om modellen over er riktig og W_i kun avhenger av W_{i-1} følger det da at X er binomisk fordelt med parameter $p = 0.51$ og n.

Vis at sannsynligheten for å forkaste nullhypotesen $H_0 : p = p_0$ til fordel for $H_1 : p > p_0$ gitt at $H_1 : p > p_0$ er sann (teststyrken) uttrykt ved n, p, p_0 og signifikansnivået α for binomisk fordelte data blir

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}},\right) \tag{3}$$

hvor Φ er kumulativ tetthet for standardnormalfordelingen (funksjonen `pnorm` i R). Hint: du trenger først å finne et uttrykk for kritisk verdi til testen (basert på testobservatorens fordeling under H_0) for deretter å finne sannsynligheten *under* H_1 for forkastning.

Programmer en funksjon med navn `teststyrke` som tar n, p, α og p_0 som argumenter og som returnerer teststyrken gitt ved uttrykket over.

Lag et plot av styrkefunksjonen (teststyrken som funksjon av p) for $p_0 = 1/2$, $n = 10000$, og $\alpha = 0.05$ og for $0.50 \leq p \leq 0.52$.

I stedet for å regne utvalgstørrelsen n som gitt og teststyrken β som en funksjon av denne kan vi i stedet ønske å finne utvalgstørrelsen n som er nødvendig for å oppnå en gitt teststyrke β. Løs ligning (3) med hensyn på n og programmer en funksjon som beregner n som funksjon av β, α, p og p_0. Hint: Finnes ϕ^{-1} som noen funksjon i R?

Beregn så hvilken utvalgstørrelse som er nødvendig dersom vi med 80% sannsynlighet skal forkaste H_0 gitt at $p = 0.51$ og vi har valgt signifikansnivået lik $\alpha = 0.05$?