# Øving 6, ST1301

**Oppgave 1** *Løse Euler-Lotka ligningen ved bruk av Newton's metode.*

Anta at vi har en organisme med maksimal alder lik $n$ år. Vi ser kun på hunnene i populasjonen. La $m_i$ være antall avkom en hunn i gjennomsnitt får ved alder $i$ (såkalt fekunditet) og la $l_i$ være gjennomsnittlig overlevelse til et avkom opp til alder $i$. Det kan da vises at populasjonen etter hvert vil vokse tilnærmet eksponentielt med rate $r$ hvor $r$ er løsningen av Euler-Lotka ligningen

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e^{-ri} l_i m_i. \tag{1}$$

Betrakt en organisme hvor $m_i$ og $l_i$ er gitt ved følgende tabell:

| Alder $i$ | Fekunditet $m_i$ | Overlevelse $l_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.75 |
| 2 | 1.20 | 0.60 |
| 3 | 1.40 | 0.48 |
| 4 | 1.03 | 0.36 |
| 5 | 0.96 | 0.18 |

Programmer en funksjon som løser ligning (1) med hensyn på $r$ ved bruk av Newton's metode og som returnerer vekstraten $r$ som funksjonsverdi for gitte fekunditeter og overlevelsesparametere. Hva blir vekstraten til en populasjon med parametere som i tabellen over?

Øk fekunditeten $m_i$ ved alder $i = 2$ med 1% og undersøk hvordan dette endrer vekstraten. Sammenlign dette med hva du får om øker fekunditeten $m_i$ ved alder $i = 5$ tilsvarende. Er vekstraten mest sensitiv for endringer av fekunditetene i lave eller i høye aldersklasser? Om vi betrakter de to endringene som to genetiske varianter, hvilken variant vil da bli mest tallrik om noen generasjoner?

**Oppgave 2** Vis at

$$\frac{d}{dx} y^x = y^x \ln y. \tag{2}$$

**Oppgave 3** *Bruk av Newton's metode for å løse estimeringsligning.*

Weibull-fordelingen er en mye brukt levetidsfordeling. Sannsynlighetstettheten er gitt ved

$$f_T(t) = \frac{a}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{b}\right)^a\right). \tag{3}$$

Legg merke til at parametriseringen er litt annerledes enn i brukerkurset i statistikk.

Om vi ser på dødsraten definert ved

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}, \tag{4}$$

altså sannsynlighet per tid for at et individ dør i et lite intervall av lengde $\Delta t$, gitt at det er i live ved tidspunkt $t$, kan det generelt vises at

$$\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}. \tag{5}$$

For Weibull-fordelingen får vi dermed

$$\lambda(t) = \frac{a}{b} \left( \frac{t}{b} \right)^{a-1}. \tag{6}$$

Om dødsraten øker med tiden svarer dette altså til at formparameteren $a$ i Weibullfordelingen er større enn 1. For $a = 1$ ser vi at modellen svarer til vanlig eksponentiell fordeling og for $a < 1$ avtar dødsraten med tiden.

Hos menneske finner en typisk at dødsraten $\lambda(t)$ øker ved høy alder ($a > 1$), såkalt aldring (senesence), i motsetning til hos mange naturlig organismer som typisk lever så kort at aldring sjeldnere forekommer.

Last ned datasettet `spurv.dat` fra hjemmesiden til faget. Last dette inn i R ved å skrive

```
t <- scan("spurv.dat")
```

Datasettet inneholder levetider fra ett års alder til 870 spurv ringmerket på Helgelandskysten i perioden 1993-1997. Lag et histogram over levetidene (med funksjonen `hist`).

Sett opp log-likelihoodfunksjonen til modellen og utled en estimeringsligning for formparameteren $a$. Anta at skalaparameteren er kjent og lik $b = 2$. Programmer en funksjon som beregner et estimatet av formparameteren $a$ ved å løse estimeringsligningen ved hjelp av Newton's metode. Husk at $\ln L$ skal deriveres med hensyn på $a$.

Kontroller svaret ved å lage et plot av $f_T(t)$ basert på estimerte parameterverdier. Sammenlign med histogrammet av de observerte dataene.

Lag også et plot av dødsraten $\lambda(t)$ basert på $b = 2$ og estimatet av $a$. Hvordan avhenger dødsraten med alder. Aldres spurven?

Beregn til slutt forventet levealder, $E(T)$, basert på $b = 2$ og estimatet av $a$.