Prosjektoppgaver om diffusjonsprosesser og diffusjonstilnærmelse

February 11, 2008

I alle oppgavene skal det skrives litt om hva diffusjonsprosesser er, hvilke spesielle resultater fra diffusjonsteorien man skal se nærmere på i oppgaven, og hva som menes med diffusjonstilnærmelse. De teoretiske resultatene for diffusjoner som benyttes skal demonstreres ved å simulere diffusjonsprosesser. Prosessene som skal tilnærmes med diffusjoner skal simuleres med passende utvalg av parameterverdier, og egenskapene til prosessene skal sammenliknes med de resultatene man finner ved å benytte diffusjonstilnærmelsen. Prøv å finne ut hva som skal til (partameterverdier) for at diffusjonstilnærmelsen blir god eller dårlig. Det blir lagt vekt på god pedagodisk framstilling med utstrakt bruk av grafer.

A Diffusjonstilnærmelse til fødels- og dødsprosesser uten tetthetsregulering

La N betegne antall individer i en populasjon. Hvert individ bidrar med et antall individer til neste generasjon og disse bidragene antas å være uavhengige. Et individ overlever til neste generasjon med sannsynlighet p og gir dermed et overlevelsesbidragbidrag I som blir 0 eller 1. I tillegg bidrar individet med X avkom til neste generasjon. Den variable X har en gitt diskret fordeling og generelt kan I og X være avhengige variable (f. eks. kan X være lik null hvis I er null). En mulig modell er at X er poissonfordelt og uavhengig av I, men det er interessant også å se på andre modeller.

Vi skal studere hvordan antall individer endrer seg over tid og hvor lang tid det tar før populasjonen dør ut. En slik prosess kan tilnærmes med en diffusjon med infinitesimal forventning og varians som begge er proposjonale med populasjonsstørrelsen N.

1. Individenes bidrag er $W = I + X$ der I er indikator for overlevelse og X er antall avkom. La X være uavhengig av I med fordeling som er en Poissonblanding. Vis studenten at Poissonblandinger oppfyller $E(X) = EE(X|\lambda) = E(\lambda)$ og $\text{var}(X) = E(\text{var}(X)|\lambda) + \text{var}(E(X|\lambda)) = E(\lambda) + \text{var}(\lambda)$. Fordelingen til λ kan f. eks. være gamma eller lognormal.

2. Anta at avkommet dør hvis moren dør, dvs. $X = 0$ hvis $I = 0$. Hvis moren overlever har X f. eks. Poissonfordeling (eller Poissonblanding) med forventning μ og varians σ^2. Vi kan da uttrykke W som $J(1+X)$ der J og X nå er uavhengige, og J har samme fordeling som I. Hvis vi innfører $p = P(I = 1)$ finner vi $EW = EJE(1 + X) = p(1 + \mu)$ og $E(W^2) = EJ^2E(1 + X)^2 = p((1 + \mu)^2 + \sigma^2)$ som gir $\text{var}(W) = p(1-p)(1+\mu)^2 + p\sigma^2$.

B Multiplikative populasjonsmodeller uten tetthetsregulering

For store populasjoner kan ofte følgende modell være realistisk: Populasjonsstørrelsen neste år er populasjonsstørrelsen forrige år multiplisert med en stokastisk faktor. Verdiene til denne faktoren fra år til år er uavhengige med samme fordeling. Populasjonen dør ut hvis populasjonsstørrelsen et år blir midre eller lik 1.

Vi skal her studere tiden det tar til populasjonen dør ut. Dette skal gjøres både ved å se på diffusjonstilnærmelsen for populasjonsstørrelsen og logaritmen til denne. Den stokastiske faktoren kan velges log-normal fordelt slik at logarimen til faktoren blir normalfordelt men andre fordelinger kan også undersøkes. .

C Diffusjon av partikler, diskret tid

To kammer er adskilt med en vegg men en liten åpning. Tilsammen befinner det seg N partikler i de to kamrene, X i det ene og $N-X$ i det andre. Hvert sekund vil en vilkårlig partikkel (en trukket tilfeldig blant alle N partikler) flytte seg over i motsatt kammer. Vi skal studere hvordan X varierer over tid.

Generelt vil $\mathrm{var}(\Delta X|X=x)$ være avhengig av x, men for store verdier av N vil X ligge nær $N/2$ og vi kan da tilnærme $\mathrm{var}(\Delta X|X=x)$ med $\mathrm{var}(\Delta X|X=N/2)$. Prosessen vil da kunne tilnærmes med en Ornstein-Uhlenbeck process. Egenskaper ved Ornstein-Uhlenbeck prosessen skal først demonstreres ved stokastiske simuleringer. Videre skal man studere diffusjon-stilnærmelsen til prosessen X basert på Ornstein-Uhlenbeck prosessen for forskjellige verdier av N.

D Ornstein-Uhlenbeck prosess som lineær tilnærmelse

Vi betrakter den multiplikative populasjonsmodellen $N_{t+1}=\Lambda_t N_t$ og antar at den stokastisk faktoren kan skrives på formen $\Lambda_t=a_t-bN_t$ der a_t er en sekvens av uavhengige identisk fordelte variable. Studer hvordan det fungerer å tilnærme denne med en lineær funksjon i $\ln N_t$ funnet ved å å bruke første leddet i rekkeutviklingen rundt bæerekapasiteten (den verdien som gir $E\Lambda=1$). Den lineariserte modellen kan nå tilnærmes med en Ornstein-Uhlenbeck prosess for $\ln N_t$.

E Stasjonærfordeling i øymodell med genetisk drift

I den såkalte øymodellen kan det vises at stasjonærfordelingen på hver enkelt øy vil være beta-fordelt om vi tilnærmer prosessen med en diffusjon. Dersom immigrasjonsratene er m, genfrekvensen blant immigranter er p_c, og den lokale populasjonsstørrelsen er N_e er parameterne i denne beta-fordeling $\alpha=4N_emp_c$ og $\beta=4N_em(1-p_c)$. Undersøk hvor god denne tilnærmingen er for en mer realistisk modell med diskrete generasjoner og genfrekvenser.

Utvid eventuellt modellen til også å inkludere seleksjon. Se Felsenstein 2007, s271, eq. VII-134, `http://evolution.gs.washington.edu/pgbook/pgbook.html`

F Logistisk modell

Vi betrakter den multiplikative populasjonsmodellen $N_{t+1} = \Lambda_t N_t$ og antar at den stokastisk faktoren kan skrives på formen $\Lambda_t = a_t - bN_t$ der a_t er en sekvens av uavhengige identisk fordelte variable.

Diffusjonstilnærmelsen er da en logistisk type modell og stasjonærfordelingen er gammafordelingen. Demonstrer at dette er riktig ved hjelp av stokastiske simuleringer og studer om stasjonærfordelingen vi finner fra diffusjonstilnærmelsen er en god tiln ærmelse for den diskrete modellen for forskjellige valg av parametre og fordeling for a_t.