Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Faglig kontakt under eksamen: Professor Jarle Tufto
Telefon: 99705519

Statistisk modellering for biologar og bioteknologar, ST2304

24. mai, 2013
Kl. 9–13
Sensur: 14. juni, 2013

Tillatne hjelpemidler: Eit håndskreve gult A4 ark, kalkulator, "Tabeller og formler i statistikk" (Tapir forlag), K. Rottmann: Matematisk formelsamling.

Hjelpesider for nokre R funskjonar det kan hende du får bruk for følgjer på side 8.

Oppgåve 1 Vi ynskjer å undersøke om variansane σ_X^2 og σ_Y^2 i to normalfordelte populasjonar er forskjellig frå kvarandre og trekker utval av storleik 10 frå den eine populasjonen og 20 frå den andre. Det kan da visast at testobservatoren $F = S_X^2/S_Y^2$, kor S_X^2 og S_Y^2 er dei to utvalgsvariansane, er F-fordelt med 9 og 19 frihetsgrader under nullhypotesen $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

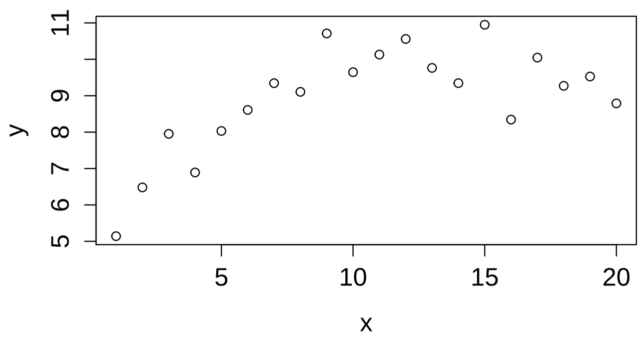
a) Skriv eit R uttrykk som rekner ut dei kritiske verdene for testen hvis vi vel eit signifikansnivå på 0.05.

b) Gå ut i frå at estimatet av dei to variansane vert henholdsvis 13.5 og 5.2. Skriv eit R-uttrykk som rekner ut testens signifikanssannsyn.

c) Er testobservatoren diskret eller kontinuerlig fordelt? Kva vert sannsynet for at testobservatoren tek ei verde eksakt lik 1?

d) Skriv et R-uttrykk som simulerer 1000 realisasjoner av testobservatoren under føresetnad om at H_0 er sann og som plotter et histogram av disse realisasjonene.

Oppgåve 2 Vi ynskjer å finne optimal temperatur for vekst av kveiteyngel og målar vekst y (gram/uke) ved 19 ulike vanntemperaturar x (°C) under elles like vilkår. Dei observerte dataene er vist under.



Gå ut i frå at vi modellerar samanhengen mellom responsvariabelen y (vekst) og temperatur x ved hjelp av multippel regresjon kor vi inkluderar temperatur x og kvadratet av temperatur, x^2, som forklaringsvariablar som følgjer.

```
> x2 <- x^2
> modell <- lm(y ~ x + x2)
> summary(modell)

Call:
lm(formula = y ~ x + x2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.55021 -0.31092  0.03203  0.38368  1.04305

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.862606   0.497222   9.780 2.14e-08 ***
x            0.816051   0.109049   7.483 8.95e-07 ***
x2          -0.031351   0.005044  -6.215 9.41e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

```
Residual standard error: 0.6683 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.8165,Adjusted R-squared: 0.7949
F-statistic: 37.82 on 2 and 17 DF,  p-value: 5.504e-07
```

a) Skriv opp modellen vi har tilpassa i matematisk (algebraisk) notasjon og kva som er føresetnadene for modellen. Kva for forklaringsvariable har ein statistisk signifikant effekt på responsvariabelen?

b) Vis at optimal veksttemperatur x_0 er funksjonen

$$x_0 = f(b_1, b_2) = -\frac{b_1}{2b_2}, \tag{1}$$

kor b_1 er regresjonskoeffisienten for temperatur x og b_2 er regresjonskoeffisienten for kvadratet av temperatur x^2. Hint: Sett den deriverte av vekst y m.h.p. temperatur x lik 0 og løys likninga for x.

Kva vert estimatet $\hat{x}_0$ av optimal veksttemperatur? Verkar dette rimeleg ut i frå dei observerte dataene?

c) Rekn ut standardfeilen til $\hat{x}_0$. Du vil blant anna trenge eit estimat av kovariansen mellom $\hat{b}_1$ og $\hat{b}_2$ som kan lesast ut av følgjande R-utskrift. Sjå hjelpsida for `vcov` for meir informasjon.

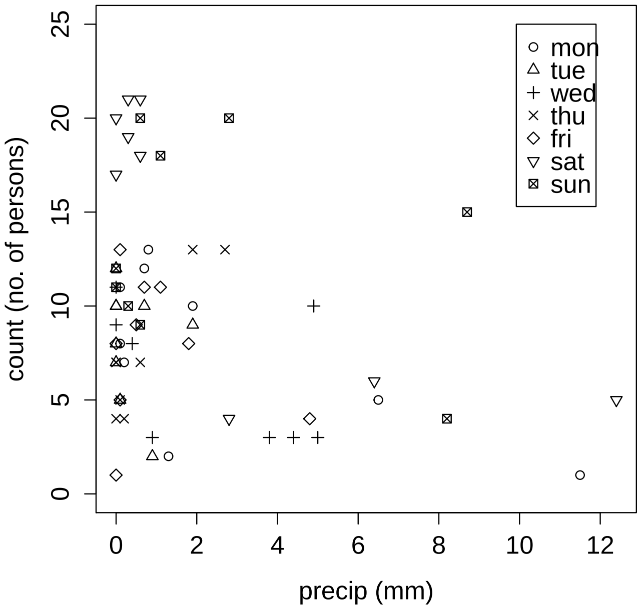
```
> vcov(modell)
             (Intercept)         x        x2
(Intercept)   0.247229 -0.048192  0.001959
x            -0.048192  0.011891 -0.000534
x2            0.001959 -0.000534  0.000025
```

Kommenter igjen om svaret verkar rimeleg ut i frå figuren over.

Oppgåve 3 Som del av ein kartlegging av rekreasjonell bruk av Bymarka i Trondheim tel vi talet på turgåerar, syklistar og joggerar som passerer eit gjeve punkt på veg inn i marka mellom kl 0900 og 2000 kvar dag i løpet av juni og juli i 2012. Vi legg dataene inn som følgjande dataramme i R.

```
> bymarka
   weekday weekend precip count
1      fri      no    0.1    13
2      sat     yes    0.3    21
3      sun     yes    2.8    20
4      mon      no    0.2     7
5      tue      no    0.7    10
6      wed      no    0.0    11
7      thu      no    1.9    13
8      fri      no    0.5     9
9      sat     yes    0.0    20
10     sun     yes    0.6    20
11     mon      no    0.1    11
12     tue      no    0.0    10
13     wed      no    0.4     8
14     thu      no    2.7    13
15     fri      no    1.8     8
16     sat     yes    0.6    21
17     sun     yes    8.7    15
18     mon      no    0.8    13
19     tue      no    0.0    10
20     wed      no    0.0     9
21     thu      no    0.0     7
.
.
.
57     fri      no    0.0     1
58     sat     yes   12.4     5
59     sun     yes    8.2     4
60     mon      no    6.5     5
61     tue      no    0.0    12
```

Variablane `weekday` og `weekend` er faktorer som representar ukedag og kvardag/helg. Variabelen `precip` er antall millimeter nedbør i kvart døgn og `count` talet på personar som passera kvar av dagene. Dataene er grafisk framstilt i følgjande figur.



Vi tilpassar først følgjande modell (modell A).

```
> fitA <- glm(count ~ weekend + precip,fam=poisson)
> summary(fitA)

Call:
glm(formula = count ~ weekend + precip, family = poisson(link="log")

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.2315  -1.2276  -0.0180   0.9036   2.3345

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  2.12138    0.05893  35.999  < 2e-16 ***
weekendyes   0.69069    0.08493   8.133 4.20e-16 ***
precip      -0.08896    0.01830  -4.860 1.17e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

```
(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 188.07  on 60  degrees of freedom
Residual deviance: 108.11  on 58  degrees of freedom
AIC: 352.32

Number of Fisher Scoring iterations: 5

> drop1(fitA,test="Chisq")
Single term deletions

Model:
count ~ weekend + precip
        Df Deviance    AIC    LRT  Pr(>Chi)
<none>       108.11 352.32
weekend  1   171.21 413.41 63.093 1.972e-15 ***
precip   1   136.50 378.71 28.390 9.919e-08 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

a) Forklar kvifor Poisson-føresetnaden kan være eit rimelig utgangspunkt. Kor mange forventast å passere på helgedagar i forhold til kvardager? Er skilnaden statistisk signifikant? Kva vert talet på passerande i ein helg på ein dag med 5mm nedbør?

For å teste om det er ein ytterligare forskjell mellom det forventa talet på turgåarar på forskjellige ukedagar utover kvardag/helt-effekten tilpassar vi følgjande alternative modell (modell B).

```
> fitB <- glm(count ~ weekday + precip,fam=poisson)
> summary(fitB)

Call:
glm(formula = count ~ weekday + precip, family = poisson)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.2586  -1.1416  -0.0993   0.9164   2.4785

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  2.22000    0.12422  17.871  < 2e-16 ***
```

```
weekdaytue  -0.09275    0.16958  -0.547 0.584407
weekdaywed  -0.19018    0.18585  -1.023 0.306167
weekdaythu  -0.14767    0.17758  -0.832 0.405633
weekdayfri  -0.08671    0.17030  -0.509 0.610648
weekdaysat   0.63720    0.14876   4.283 1.84e-05 ***
weekdaysun   0.54393    0.15132   3.595 0.000325 ***
precip      -0.08874    0.01857  -4.777 1.78e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 188.07  on 60  degrees of freedom
Residual deviance: 106.33  on 53  degrees of freedom
AIC: 360.54

Number of Fisher Scoring iterations: 5

> drop1(fitB,test="Chisq")
Single term deletions

Model:
count ~ weekday + precip
        Df Deviance    AIC    LRT  Pr(>Chi)
<none>       106.33 360.54
weekday  6   171.21 413.41 64.877 4.572e-12 ***
precip   1   133.60 385.81 27.269 1.770e-07 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

b) Forklar kvifor modell A er nøsta i modell B. Kva er talet på estimerte parametarar under modell A og B? Gjennomfør ein test av om det er noko innbyrdes forskjell mellom ulike kvardager og ulike helgedagar i det forventa talet på passerande utover helg/kvardag-effekten. Hint: Dette kan ikkje lesast direkte ut frå utskriften over men må gjerast «for hånd». Er modell A eller B å føretrekke ut i frå de observerte dataene? Føreset at det ikkje er overdispersjon i dataene.

c) Test om det er overdispersjon under den valgte modellen. Diskuter moglege mekanismar som kan tenkast å generere overdispersjon i dette tilfelle.

```
FDist                 package:stats                    R Documentation

The F Distribution

Description:

     Density, distribution function, quantile function and random
     generation for the F distribution with 'df1' and 'df2' degrees of
     freedom (and optional non-centrality parameter 'ncp').

Usage:

     df(x, df1, df2, ncp, log = FALSE)
     pf(q, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
     qf(p, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
     rf(n, df1, df2, ncp)

Arguments:

    x, q: vector of quantiles.

       p: vector of probabilities.

       n: number of observations. If 'length(n) > 1', the length is
          taken to be the number required.

df1, df2: degrees of freedom.  'Inf' is allowed.

     ncp: non-centrality parameter. If omitted the central F is
          assumed.

log, log.p: logical; if TRUE, probabilities p are given as log(p).

lower.tail: logical; if TRUE (default), probabilities are P[X <= x],
          otherwise, P[X > x].

Details:

     The F distribution with 'df1 =' n1 and 'df2 =' n2 degrees of
     freedom has density

     f(x) = Gamma((n1 + n2)/2) / (Gamma(n1/2) Gamma(n2/2))
         (n1/n2)^(n1/2) x^(n1/2 - 1)
         (1 + (n1/n2) x)^-(n1 + n2)/2

     for x > 0.

     It is the distribution of the ratio of the mean squares of n1 and
     n2 independent standard normals, and hence of the ratio of two
     independent chi-squared variates each divided by its degrees of
     freedom.  Since the ratio of a normal and the root mean-square of
     m independent normals has a Student's t_m distribution, the square
     of a t_m variate has a F distribution on 1 and m degrees of
     freedom.

     The non-central F distribution is again the ratio of mean squares
     of independent normals of unit variance, but those in the
     numerator are allowed to have non-zero means and 'ncp' is the sum
     of squares of the means.  See Chisquare for further details on
     non-central distributions.

Value:

     'df' gives the density, 'pf' gives the distribution function 'qf'
     gives the quantile function, and 'rf' generates random deviates.

     Invalid arguments will result in return value 'NaN', with a
     warning.

Note:

     Supplying 'ncp = 0' uses the algorithm for the non-central
     distribution, which is not the same algorithm used if 'ncp' is
     omitted.  This is to give consistent behaviour in extreme cases
     with values of 'ncp' very near zero.

     The code for non-zero 'ncp' is principally intended to be used for
     moderate values of 'ncp': it will not be highly accurate,
     especially in the tails, for large values.

Source:

     For the central case of 'df', computed _via_ a binomial
     probability, code contributed by Catherine Loader (see 'dbinom');
     for the non-central case computed _via_ 'dbeta', code contributed
     by Peter Ruckdeschel.

     For 'pf', _via_ 'pbeta' (or for large 'df2', _via_ 'pchisq').

     For 'qf', _via_ 'qchisq' for large 'df2', else _via_ 'qbeta'.

References:

     Becker, R. A., Chambers, J. M. and Wilks, A. R. (1988) _The New S
     Language_.  Wadsworth & Brooks/Cole.

     Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995) _Continuous
     Univariate Distributions_, volume 2, chapters 27 and 30.  Wiley,
     New York.

See Also:

     Distributions for other standard distributions, including 'dchisq'
     for chi-squared and 'dt' for Student's t distributions.

Examples:

     ## the density of the square of a t_m is 2*dt(x, m)/(2*x)
     # check this is the same as the density of F_{1,m}
     x <- seq(0.001, 5, len=100)
     all.equal(df(x^2, 1, 5), dt(x, 5)/x)

     ## Identity:  qf(2*p - 1, 1, df)) == qt(p, df)^2)  for  p >= 1/2
     p <- seq(1/2, .99, length=50); df <- 10
     rel.err <- function(x,y) ifelse(x==y,0, abs(x-y)/mean(abs(c(x,y))))
     quantile(rel.err(qf(2*p - 1, df1=1, df2=df), qt(p, df)^2), .90)# ~= 7e-9

----------------------------------------------------------------------------
vcov                  package:stats                    R Documentation

Calculate Variance-Covariance Matrix for a Fitted Model Object

Description:

     Returns the variance-covariance matrix of the main parameters of a
     fitted model object.

Usage:

     vcov(object, ...)

Arguments:

  object: a fitted model object, typically.  Sometimes also a
          'summary()' object of such a fitted model.

     ...: additional arguments for method functions.  For the 'glm'
          method this can be used to pass a 'dispersion' parameter.

Details:

     This is a generic function.  Functions with names beginning in
     'vcov.' will be methods for this function.  Classes with methods
     for this function include: 'lm', 'mlm', 'glm', 'nls',
     'summary.lm', 'summary.glm', 'negbin', 'polr', 'rlm' (in package
     'MASS'), 'multinom' (in package 'nnet') 'gls', 'lme' (in package
     'nlme'), 'coxph' and 'survreg' (in package 'survival').

     ('vcov()' methods for summary objects allow more efficient and
     still encapsulated access when both 'summary(mod)' and 'vcov(mod)'
     are needed.)

Value:

     A matrix of the estimated covariances between the parameter
     estimates in the linear or non-linear predictor of the model.
     This should have row and column names corresponding to the
     parameter names given by the 'coef' method.
```