NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for (instituttnavn): Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i (emnekode) (emnenavn)
ST2304 Statistisk modellering for biologer og bioteknologer

Faglig kontakt under eksamen: Jarle Tufto

Tlf.: 99705519

Eksamensdato: 15. mai, 2015

Eksamenstid (fra-til): 9-13

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C. Et håndskrevet gult A4 ark, kalkulator, “Tabeller og formler i statistikk” (Tapir forlag), K. Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annen informasjon:

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (uten forside): 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Hjelpesider for noen R funksjoner det kan hende du får bruk for følger på side 6.

Oppgave 1 Anta at vi setter opp et stort antall insektsfeller plassert langs en linjetransekt for å finne en skjelden insektsart. La X_i betenge antall eksemplarer av arten som er gått i den i'te fellen når denne undersøkes etter ett døgn, og anta at hver X_i er uavhengig Poisson-fordelt med forventningsverdi 0.002.

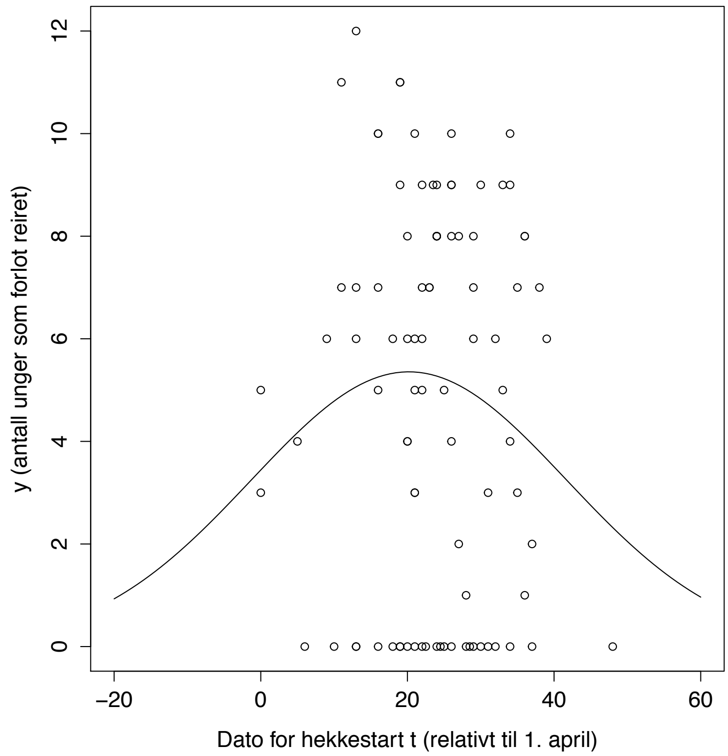
a) Begrunn kort hvorfor Poisson-antakelsen kan være rimelig og skriv et R-uttrykk som beregner sannsynligheten for at minst ett eksemplar av innsektetsarten fanges i en gitt felle. Utform uttrykket slik at verdien av uttrykket tas vare på i variabelen `p.tilstede`.

La Y være totalt antall feller som vi må undersøke før vi finner en felle hvor den sjeldne arten er tilstede.

b) Hvilken fordeling har Y dersom vi forutsetter at antall feller er ubegrenset? Skriv R-uttrykk som beregner sannsynligheten for at Y tar en verdi mellom 18.2 og 30.5 og sannsynligheten for at Y tar nøyaktig verdien 20.

c) Skriv et R-uttrykk som beregner et 95%-sannsynlighetsintervall for Y, altså nedre og øvre 2.5%-kvantil til Y.

Oppgave 2 Vi ønsker å undersøke hvordan tidspunkt for hekkestart hos kjøttmeispar påvirker antall utflydde unger. Kjøttmeis legger opptil to kull hver sesong. Vi registrerer derfor tidspunkt for hekkestart t (antall dager etter 1. april) og totalt antall utflydde unger y for tilsammen 92 hekkende kjøttmeispar. De observerte dateene er som i følgende figur.



Vi tilpasser så en generalisert lineær modell til dataene på følgende måte.

```
> t2 <- t^2
> fit <- glm(y ~ t + t2, family=poisson(link="log"))
> summary(fit)

Call:
glm(formula = y ~ t + t2, family = poisson(link = "log"))

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.2729  -2.8407   0.2778   1.1982   2.6146

Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  1.2361689  0.2547556   4.852 1.22e-06 ***
```

```
t            0.0437550  0.0222333   1.968   0.0491 *
t2          -0.0010827  0.0004782  -2.264   0.0236 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 360.23  on 91  degrees of freedom
Residual deviance: 353.81  on 89  degrees of freedom
AIC: 606.07

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

a) La β_0, β_1 og β_2 betegne parameterne i modellen (hvor β_2 er regressjonkoeffisienten for t^2). Skriv opp modellen i matematisk notasjon. Skriv i tillegg opp hva forventet antall utflydde unger, $E(Y)$, blir som funksjon av tidspunkt for hekkestart t.

b) $E(Y)$ som funksjon av t er plottet i figuren over. Om vi reparameteriserer modellen kan vi skrive sammenhengen på formen

$$E(Y) = y_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\omega}\right)^2}, \tag{1}$$

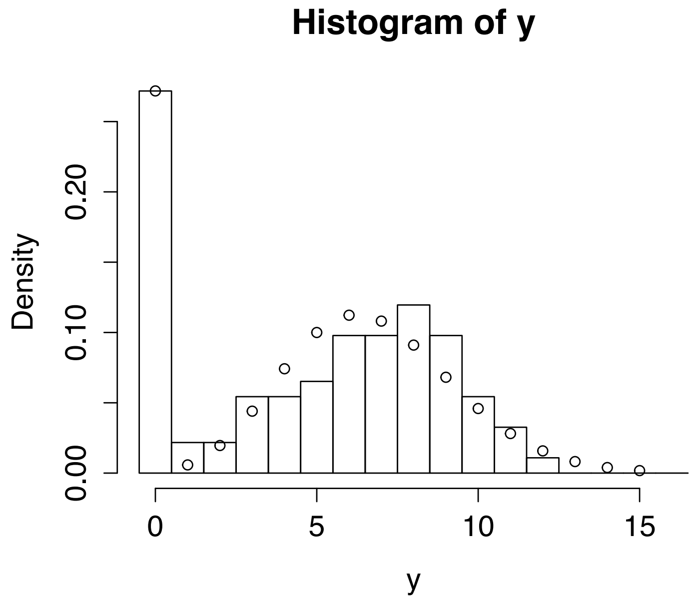
altså en Gauss-kurve (se figur) hvor t_0 er optimalt hekkestartstidspunkt, y_0 er forventet antall utflydde unger for hekkestart ved $t = t_0$, og ω er et mål på «bredden» til Gauss-kurven (antall dager) (analogt med standardavviket til en normalfordelt variabel). Vis at sammenhengen mellom ω og β_2 i regresjonsmodellen over er gitt ved

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{2\beta_2}}. \tag{2}$$

c) Beregn et estimat av ω og tilhørende standardfeil til dette estimatet.

d) Test om det er overdispersjon i dataene. Avrund om nødvendig antall frihetsgrader til nærmeste multiplum av 10. Kan vi i lys av dette stole på standardfeilene beregnet i punkt c? Anta at vi estimerer variansen til Y til å være omlag 2.8 ganger større enn forventet dersom Y hadde hatt samme varians som en Poisson-fordelt variabel. Beregn nye korrigerte estimat av standardfeilen til $\hat{\beta}_2$ og $\hat{\omega}$. Diskuter kort konkrete mekanismer som kan generere overdispersjon i dette tilfellet.

I resten av oppgaven skal vi i mer detalj studere fordelingen til variabelen Y beskrevet tidligere (totalt antall unger produsert av ulike kjøttmeispar i løpet av hekkesesongen). Et histogram av den observerte fordeling til Y (representert ved stolpene i histogrammet) er gitt under.



Histogrammet tyder på at det er en forhøyet sannsynlighet for at Y tar verdien null, såkalt null-inflasjon, i forhold til hva vi kunne forventet hvis fordelingen hadde vært beskrevet ved en Poisson-fordeling. For å modellere dette tilpasser vi en modell H_1 hvor

$$P(Y = y) = p_0 I_0(y) + (1 - p_0)\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, \tag{3}$$

hvor $I_0(y)$ er en funksjon av y som tar verdien 1 for $y = 0$ og verdien 0 for $y \neq 0$. Denne modellen representerer da at null-inflasjon inntreffer med sannsynlighet p_0 (mislykket hekking f.eks. som følge av at en rugekasse overtas av en svart-hvit fluesnapper). Gitt null-inflasjon tar Y verdien 0 med sannsynlighet 1. Gitt at null-inflasjon ikke intreffer (med sannsynlighet $1 - p_0$) er Y poissonfordelt med parameter λ.

Vi estimerer p_0 og λ ved å programmere minus log-likelihoodfunksjonen for modellen beskrevet ovenfor som en funksjon med navn `lnL`. Vi tilpasser så modellen numerisk på følgende måte i R. Den tilpassede modellen er representert ved sirklene i figuren ovenfor.

```
> fit <- optim(c(.2,5),lnL,y=y,hessian=TRUE)
> fit
$par
[1] 0.2709197 6.7380696

$value
[1] 213.6592

$counts
function gradient
      57       NA

$convergence
[1] 0

$message
NULL

$hessian
            [,1]       [,2]
[1,] 463.7016481 -0.4010448
[2,]  -0.4010448  9.8763866

> solve(fit$hessian)
             [,1]         [,2]
[1,] 2.156635e-03 8.757323e-05
[2,] 8.757323e-05 1.012552e-01
```

e) Hva er sannsynlighetsmaksimeringsestimatene av p_0 og λ samt tilnærmet standardfeil til disse estimatene?

f) Skriv opp et matematisk uttrykk for log-likelihoodfunksjonen for modellen uten null-inflasjon H_0 og beregn det maksimale log likelihoodet under denne modellen. Det er ikke nødvendig å utlede SMEen av λ dersom du husker denne. Det oppgis at utvalgsstørrelsen $n = 92$, at $\sum_{i=1}^{n} y_i = 452$, og at $\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i!) = 452$. Kan vi forkaste H_0 til fordel for H_1?

g) Programmer funksjonen `lnL` som vi har brukt ovenfor for å tilpasse modellen H_1. Dette kan gjøres f.eks. ved bruk av vektorisert if-else-setning, se hjelpesiden til `ifelse`, eller ved bruk av logiske vektorer som indekser. Det kan også være hensiktsmessig å bruke funksjonen `dpois`.

Poisson   package:stats   R Documentation

The Poisson Distribution

Description:

Density, distribution function, quantile function and random generation for the Poisson distribution with parameter 'lambda'.

Usage:

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rpois(n, lambda)
```

Arguments:

x: vector of (non-negative integer) quantiles.

q: vector of quantiles.

p: vector of probabilities.

n: number of random values to return.

lambda: vector of (non-negative) means.

log, log.p: logical; if TRUE, probabilities p are given as log(p).

lower.tail: logical; if TRUE (default), probabilities are P[X <= x], otherwise, P[X > x].

Details:

The Poisson distribution has density

p(x) = lambda^x exp(-lambda)/x!

for x = 0, 1, 2, ... The mean and variance are E(X) = Var(X) = lambda.

If an element of 'x' is not integer, the result of 'dpois' is zero, with a warning. p(x) is computed using Loader's algorithm, see the reference in 'dbinom'.

The quantile is right continuous: 'qpois(p, lambda)' is the smallest integer x such that P(X <= x) >= p.

Setting 'lower.tail = FALSE' allows to get much more precise results when the default, 'lower.tail = TRUE' would return 1, see the example below.

Value:

'dpois' gives the (log) density, 'ppois' gives the (log) distribution function, 'qpois' gives the quantile function, and 'rpois' generates random deviates.

Invalid 'lambda' will result in return value 'NaN', with a warning.

The length of the result is determined by 'n' for 'rpois', and is the maximum of the lengths of the numerical arguments for the other functions.

The numerical arguments other than 'n' are recycled to the length of the result. Only the first elements of the logical arguments are used.

Source:

'dpois' uses C code contributed by Catherine Loader (see 'dbinom').

'ppois' uses 'pgamma'.

'qpois' uses the Cornish-Fisher Expansion to include a skewness correction to a normal approximation, followed by a search.

'rpois' uses

Ahrens, J. H. and Dieter, U. (1982). Computer generation of Poisson deviates from modified normal distributions. _ACM Transactions on Mathematical Software_, *8*, 163-179.

See Also:

Distributions for other standard distributions, including 'dbinom' for the binomial and 'dnbinom' for the negative binomial distribution.

'poisson.test'.

Examples:

```
require(graphics)

-log(dpois(0:7, lambda = 1) * gamma(1+ 0:7)) # == 1
Ni <- rpois(50, lambda = 4); table(factor(Ni, 0:max(Ni)))

1 - ppois(10*(15:25), lambda = 100)  # becomes 0 (cancellation)
    ppois(10*(15:25), lambda = 100, lower.tail = FALSE)  # no cancellation

par(mfrow = c(2, 1))
x <- seq(-0.01, 5, 0.01)
plot(x, ppois(x, 1), type = "s", ylab = "F(x)", main = "Poisson(1) CDF")
plot(x, pbinom(x, 100, 0.01), type = "s", ylab = "F(x)",
     main = "Binomial(100, 0.01) CDF")
```

Geometric   package:stats   R Documentation

The Geometric Distribution

Description:

Density, distribution function, quantile function and random generation for the geometric distribution with parameter 'prob'.

Usage:

```
dgeom(x, prob, log = FALSE)
pgeom(q, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qgeom(p, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rgeom(n, prob)
```

Arguments:

x, q: vector of quantiles representing the number of failures in a sequence of Bernoulli trials before success occurs.

p: vector of probabilities.

n: number of observations. If 'length(n) > 1', the length is taken to be the number required.

prob: probability of success in each trial. '0 < prob <= 1'.

log, log.p: logical; if TRUE, probabilities p are given as log(p).

lower.tail: logical; if TRUE (default), probabilities are P[X <= x], otherwise, P[X > x].

Details:

The geometric distribution with 'prob' = p has density

p(x) = p (1-p)^x

for x = 0, 1, 2, ..., 0 < p <= 1.

If an element of 'x' is not integer, the result of 'dgeom' is zero, with a warning.

The quantile is defined as the smallest value x such that F(x) >= p, where F is the distribution function.

Value:

'dgeom' gives the density, 'pgeom' gives the distribution function, 'qgeom' gives the quantile function, and 'rgeom' generates random deviates.

Invalid 'prob' will result in return value 'NaN', with a warning.

The length of the result is determined by 'n' for 'rgeom', and is

```
     the maximum of the lengths of the numerical arguments for the
     other functions.

     The numerical arguments other than 'n' are recycled to the length
     of the result.  Only the first elements of the logical arguments
     are used.

Source:

     'dgeom' computes via 'dbinom', using code contributed by Catherine
     Loader (see 'dbinom').

     'pgeom' and 'qgeom' are based on the closed-form formulae.

     'rgeom' uses the derivation as an exponential mixture of Poissons,
     see

     Devroye, L. (1986) _Non-Uniform Random Variate Generation._
     Springer-Verlag, New York. Page 480.

See Also:

     Distributions for other standard distributions, including
     'dnbinom' for the negative binomial which generalizes the
     geometric distribution.

Examples:

     qgeom((1:9)/10, prob = .2)
     Ni <- rgeom(20, prob = 1/4); table(factor(Ni, 0:max(Ni)))
----------------------------------------------------------------------
ifelse                  package:base                   R Documentation

Conditional Element Selection

Description:

     'ifelse' returns a value with the same shape as 'test' which is
     filled with elements selected from either 'yes' or 'no' depending
     on whether the element of 'test' is 'TRUE' or 'FALSE'.

Usage:

     ifelse(test, yes, no)

Arguments:

    test: an object which can be coerced to logical mode.

     yes: return values for true elements of 'test'.

      no: return values for false elements of 'test'.

Details:

     If 'yes' or 'no' are too short, their elements are recycled.
     'yes' will be evaluated if and only if any element of 'test' is
     true, and analogously for 'no'.

     Missing values in 'test' give missing values in the result.

Value:

     A vector of the same length and attributes (including dimensions
     and '"class"') as 'test' and data values from the values of 'yes'
     or 'no'.  The mode of the answer will be coerced from logical to
     accommodate first any values taken from 'yes' and then any values
     taken from 'no'.

Warning:

     The mode of the result may depend on the value of 'test' (see the
     examples), and the class attribute (see 'oldClass') of the result
     is taken from 'test' and may be inappropriate for the values
     selected from 'yes' and 'no'.

     Sometimes it is better to use a construction such as

       (tmp <- yes; tmp[!test] <- no[!test]; tmp)
     , possibly extended to handle missing values in 'test'.

References:

     Becker, R. A., Chambers, J. M. and Wilks, A. R. (1988) _The New S
     Language_.  Wadsworth & Brooks/Cole.

See Also:

     'if'.

Examples:

     x <- c(6:-4)
     sqrt(x)  #- gives warning
     sqrt(ifelse(x >= 0, x, NA))  # no warning

     ## Note: the following also gives the warning !
     ifelse(x >= 0, sqrt(x), NA)

     ## example of different return modes:
     yes <- 1:3
     no <- pi^(0:3)
     typeof(ifelse(NA, yes, no))    # logical
     typeof(ifelse(TRUE, yes, no))  # integer
     typeof(ifelse(FALSE, yes, no)) # double
```