Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

0

Fasit for EKSAMEN I MA2104 Differensiallikninger og kompleks funksjonsteori

Mandag 13. desember 2004

Dette er ikke et fullstendig løsningsforslag og oppfyller ikke betingelsen om at alle svar skal begrunnes, og at det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. (Si fra hvis du finner noen feil her.)

Oppgave 1 Vi har $1 - i = 2^{1/2}e^{-i\pi/4}$. Så med $z = re^{i\theta}$ blir

$$\begin{aligned} z^3 = 1 - i &\iff r^3 e^{i3\theta} = 2^{1/2}e^{-i\pi/4} \\ &\iff r = 2^{1/6},\ \theta = -\pi/12 + 2k\pi/3 = -\pi/12,\ 7\pi/12,\ -3\pi/4. \end{aligned}$$

Figur:

Oppgave 2

a) Formlene vedlagt kan brukes til å vise at Fourier-cosinusrekka blir

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2+1}\right).$$

b) f er stykkevis glatt, kontinuerlig for $x \in [0, \pi)$, så Fourier-cosinusrekka konvergerer mot $f(x)$ i dette intervallet. Setter vi inn $x = 0$, får vi

$$1 = \frac{\sinh \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right) \text{ dvs.}$$

$$\frac{\pi}{2\sinh \pi} = \sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

c) Prøv $u(x, y) = X(x)T(t)$. Første likning gir $X''T + XT' = 0$, dvs.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)} = k$$

Likning nr 2 gir videre at $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Hvis $k > 0$ er det bare $X = 0$ som oppfyller begge likningene. Hvis $k = 0$, vil $u_0(x, y) = A_0$ oppfylle begge likningene.

Hvis $k = -\mu^2$ med $\mu > 0$ får en

$$X(x) = A\cos \mu x + B\sin \mu x.$$

Da vil $X'(0) = 0$ gi at $B = 0$ og $X'(\pi) = 0$ gi at $\mu = n \in \mathbf{N}$. Sett derfor $X_n(x) = \cos nx$. For likningen med T får en nå $T' = n^2 T$, så en kan ta $T_n(t) = e^{n^2 t}$, dvs

$$u_n(x, y) = A_n \cos nx\, e^{n^2 t}.$$

Vi må så bestemme A_n slik at

$$u(x, y) = \sum_{0}^{\infty} A_n \cos nx\, e^{n^2 t}$$

oppfyller $u(x, 0) = \cosh x$. Fra pkt a) følger det at A_n = koeffisientene funnet der, så løsningen blir:

$$u(x, y) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx\, e^{n^2 t}}{n^2+1}\right).$$

Oppgave 3

a) $\cosh z = 0 \iff e^z = -e^{-z} \iff e^{2z} = -1 = e^{i\pi} \iff 2z = i\pi + 2ki\pi \iff z = i\pi(\frac{1}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Siden $\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \neq 0$ for disse verdiene av z, har $\cosh z$ nullpunkt av 1. orden, dvs f har pol av 1. orden.

b) $z = i\pi/2$ er eneste singulære punkt innenfor rektanglet, så

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\pi/2) = 2\pi i \left[\frac{1}{\sinh z}\right]_{z=i\pi/2} = 2\pi.$$

c) Langs høyre side, H_R, er $z = R + it$ med $0 \le t \le \pi$. Videre blir

$$|\cosh(R+it)| = \frac{1}{2}\left|e^R e^{it} + e^{-R}e^{-it}\right| = \frac{1}{2}\left|e^R + e^{-R}e^{-2it}\right| \ge \frac{1}{2}\left(e^R - e^{-R}\right).$$

Derfor vil

$$\left|\int_{H_R} f(z)dz\right| \le \frac{2\pi}{e^R - e^{-R}}$$

og dette går mot 0 når $R \to \infty$. Tilsvarende vises at integralet langs venstre side, V_R, i rektanglet også går mot 0 når $R \to \infty$.

d) Integralet over øvre horisontale del, U_R, av rektanglet er gitt ved at $z = \pi i - t$ med $-R \le t \le R$, så

$$\int_{U_R} f(z)dz = -\int_{-R}^{R} \frac{dt}{\cosh(\pi i - t)} = \int_{-R}^{R} \frac{dt}{\cosh t}.$$

Dermed blir

$$2\pi = 2\int_{-R}^{R} \frac{dt}{\cosh t} + \int_{H_R} f(z)dz + \int_{V_R} f(z)dz.$$

Så når $R \to \infty$ får vi at

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh x}\, dx = \pi/2.$$

Oppgave 4 Siden 0 og 1 blir de singulære punktene, blir det Laurent-rekker for $0 < |z| < 1$ og for $1 < |z|$.

For $0 < |z| < 1$ er

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z}\sum_0^\infty (-z)^n = \sum_{-1}^\infty (-1)^{n+1}(z)^n.$$

For $1 < |z|$ blir

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z^2(1+z^{-1})} = \frac{1}{z^2}\sum_0^\infty \left(\frac{-1}{z}\right)^n = \sum_0^\infty (-1)^n (z)^{-n-2}.$$

Oppgave 5 Vi gjør om til et komplekst integral ved $z = e^{i\theta}$, så $dz = iz d\theta$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ og med $C = C_1(0)$ har vi

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2} + \cos\theta}\, d\theta = \int_C \frac{(z+z^{-1})/2}{(\sqrt{2} + (z+z^{-1})/2)iz}\, dz = -i\int_C \frac{1+z^2}{z(z+1+\sqrt{2})(z-1+\sqrt{2})}\, dz.$$

Singulære punkt innenfor C blir $z = 0$ og $z = 1 - \sqrt{2}$. Begge er enkle poler, så vi får

$$I = 2\pi i(-i)\left[1 + \frac{1 + (1-\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})2}\right] = 2\pi(1-\sqrt{2}).$$