Løsningsforslag MA2104 3.12.2005

Oppg 1 $f(z) = \mathrm{Im}(\bar{z}^2) + i\,\mathrm{Re}(z^2)$

$$= i\left(\mathrm{Re}(z^2) + i\,\mathrm{Im}(z^2)\right) = i z^2$$

dvs analytisk

evt $f(x+iy) = -2xy + i(x^2-y^2)$

Vis så at $u(x,y) = -2xy$ og $v(x,y) = x^2-y^2$

oppfyller Cauchy-Riemann

Oppg 2 $4 \sin z = 3i$

$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 3i$, sett $w = e^{iz}$

$\Leftrightarrow \quad w - w^{-1} = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad w^2 + \frac{3}{2}w - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad w = -2$ eller $w = \frac{1}{2}$

i) $e^{iz} = -2 \Leftrightarrow e^{ix-y} = e^{i\pi}\cdot 2$

$\Leftrightarrow \quad y = -\ln 2 \quad x = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad z = (2k+1)\pi - i\ln 2 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

ii) $e^{iz} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{ix-y} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad y = \ln 2 \quad x = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi + i\ln 2$

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

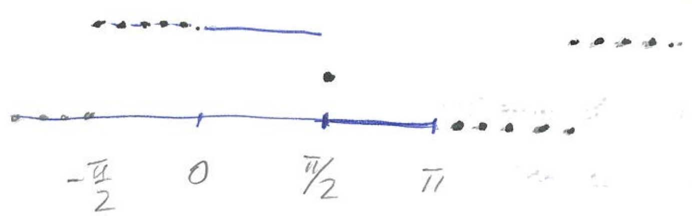
Oppg3 a)

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ like} \\ \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} & \text{for } n = 2k+1 \end{cases}$$

Så Fourier cosinus rekka blir

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$$



f er stykkevis glatt, så summen $S(x)$ av rekka blir

$S(0) = 1 \quad S(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \quad S(\pi) = 0$

b) $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ innsatt i (1) gir

(1') $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = k =$ konstant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = X'(a)\,T(t)$$

så (2) $\Leftrightarrow$ (2') $X'(0) = X'(\pi) = 0$

i) Hvis $k = \mu^2$, gir $X'' = \mu^2 X$ at

$$X(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}$$

$$X'(x) = \mu A e^{\mu x} - \mu B e^{-\mu x}$$

så (2') gir $A = B = 0$

ii) $k = 0$ gir $X'' = 0$ dvs

$X(x) = Ax + B$, $X'(x) = A$ så (2') $\Rightarrow A = 0$

Sammen med $T' = 0 \Rightarrow T =$ konstant får vi

$u(x,t) = C_0$

iii) $k = -\mu^2 < 0$ og $X'' + \mu^2 X = 0$ gir

$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$

$X'(x) = -\mu A\sin\mu x + \mu B\cos\mu x$

$X'(0) = X'(\pi) = 0$ gir $B = 0$ $\sin\mu\pi = 0$

dvs $\mu = n = 1, 2, 3, \ldots$

$T'(t) = -\mu^2 T(t)$ gir $T(t) = C_n e^{-n^2 t}$

dvs. Løsningene blir

$u_n(x,t) = C_n \cos nx \, e^{-n^2 t}$

c) Prøv

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \, e^{-n^2 t}$$

$u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = C_0 + \sum_1^{\infty} C_n \cos nx$

Så C_n må være koeffisientene i cosinusrekka til f, dvs fra a)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos(2k+1)x \, e^{-(2k+1)^2 t}$$

Oppg 4

$$f(z) = -\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \cdots$$

$$= z^2 g(z)$$ der g er analytisk og $g(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$

Så 0 er et nullpunkt av orden 2.

$$f_n(z) = \frac{f(z)}{z^n} = \frac{g(z)}{z^{n-2}}$$

Så for $n = 0, 1, 2$ uvesentlig singularitet

pol av orden $n-2$ når $n > 2$.

Oppg 5 a) f har singulariteter i $0, \pm i$ som alle ligger inne i C_R

Sett $g(z) = \dfrac{e^{az}}{z^2+1}$, da er i følge gen. Cauchy: $f(z) = \dfrac{g(z)}{z^2}$

$$\mathrm{Res}(f,0) = g'(0) = a$$

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{ai}}{i^2 \cdot 2i} = \frac{i e^{ai}}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{e^{-ai}}{(-i)^2(-2i)} = \frac{-i e^{-ai}}{2}$$

Så

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i(a - \sin a) \qquad \int_{K_R} f(z)\,dz = 0$$

b) Anta $a<0$ og la A_R være den krumme delen av K_R

$$|I_R| = \left|\int_{A_R} \frac{e^{az}}{z^2(z^2+1)}\,dz\right| \le \max_{z\in A_R}\left|\frac{e^{az}}{z^2(z^2+1)}\right| \; l(A_R)$$

For $z \in A_R$ er $|z| = R$ $\quad |z^2+1| \ge R^2-1$

$$|e^{az}| = \left|e^{aR(\cos t + i\sin t)}\right| = e^{aR\cos t} \le 1 \text{ når } a<0$$

så $|I_R| \le \dfrac{\pi R}{R^2(R^2-1)} \to 0$ når $R \to \infty$

Det følger at $\displaystyle\int_A f(z)\,dz = 0$

(Vanskelig)

Anta $a > 0$. Den krumme delen av C_R kan deles i tre, B_R i venstre halvplan C_R i første kvadrant og D_R i fjerde kvadrant

Over B_R er $|e^{az}| = |e^{aR(\cos t + i\sin t)}| = e^{aR\cos t} \leq 1$

dvs $$\left|\int_{B_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2(R^2-1)} \to 0 \text{ når } R \to \infty$$

Vi ser på integralet over C_R,

$$|I_2| = \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\theta_R}^{\pi/2} \frac{|e^{aR(\cos t + i\sin t)}|}{R^2(R^2-1)}\,dt$$

$$= \int_{\theta_R}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{aR\cos t}}{R^2(R^2-1)}\,dt \leq \int_{\theta_R}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{aR\cos\theta_R}}{R^2(R^2-1)}\,dt$$

$\cos\theta_R = \frac{1}{R}$ Så $$|I_2| \leq \frac{e^{a}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_R\right)}{R^2(R^2-1)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Fra dette får vi at

$$\int_A f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i(a - \sin a)$$