

Fagleg kontakt under eksamen:  
Magnus B. Landstad tlf. 7359 1753

EKSAMEN I MA2104 Differensiallikningar og kompleks funksjonsteori  
Nynorsk  
Laurdag 3. desember 2005  
Kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)

Sensurdato: 28. desember 2005

*Alle svar skal grunngjevast, og det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.*

**Oppgåve 1** Er funksjonen

$$f(z) = \operatorname{Im}(z^2) + i\operatorname{Re}(z^2)$$

analytisk?

**Oppgåve 2** Finn alle løysingar av likninga

$$4 \sin z = 3i.$$

**Oppgåve 3**

a) Funksjonen  $f(x)$  er definert ved

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & \text{for } 0 < x < \pi/2 \\ f(x) &= 0 & \text{for } \pi/2 < x < \pi. \end{aligned}$$

Finn Fourier-cosinusrekkeja til funksjonen på intervallet  $0 < x < \pi$ . Kva blir summen i dei tre punkta  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$  og  $x = \pi$ ?

b) Finn alle funksjonar på forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$  såleis at

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{for } 0 < x < \pi, t > 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

c) Finn (på rekkjeform) ein funksjon  $u(x, t)$  som oppfyller (1) og (2) samt  $u(x, 0) = f(x)$  for  $0 < x < \pi$  der  $f(x)$  er funksjonen definert i a).

**Oppgåve 4** Sjå på funksjonane

$$f(z) = \cos z - 1 \quad \text{og}$$

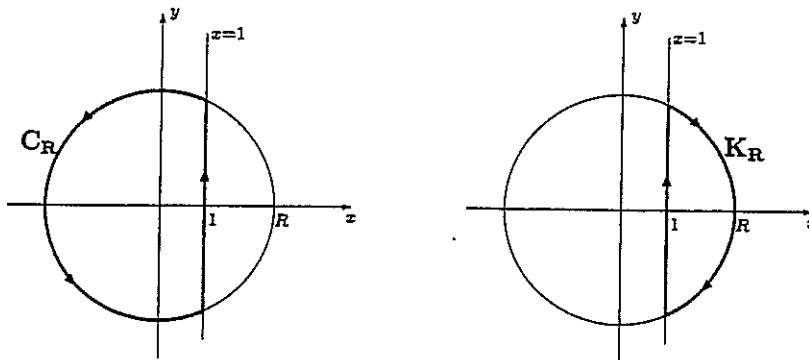
$$f_n(z) = \frac{\cos z - 1}{z^n}.$$

Kva er ordenen av nullpunktet til  $f$  i  $z = 0$ ? Avgjer for alle naturlege tall  $n$  kva slag singularitet  $f_n$  har i  $z = 0$ , og avgjer ordenen på eventuelle polar.

**Oppgåve 5** Lat funksjonen  $f$  vere definert ved

$$f(z) = \frac{e^{az}}{z^2(z^2 + 1)}$$

der  $a$  er eit reelt tal. La  $C_R$  og  $K_R$  vere dei lukka kurvene på figuren:



a) Reikn ut integrala

$$\int_{C_R} f(z) dz \quad \text{og} \quad \int_{K_R} f(z) dz.$$

b) Lat  $A$  vere linja  $z = 1 + yi$  der  $-\infty < y < \infty$ . Finn verdet av integralet

$$\int_A f(z) dz$$

for  $a \geq 0$  og for  $a < 0$ .

(Hint: Sjå på  $\int_{C_R} f(z) dz$  når  $a \geq 0$  og  $\int_{K_R} f(z) dz$  når  $a < 0$ .)