## 4.6.13

$$f(z) = \frac{1-z^2}{\sin z} + \frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\sin z - (z+1)^2)}{(z+1)\sin z}$$

Singulære punkt; $z = -1$ og $z = k\pi$ $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{(\sin z - (z+1)^2)(z-1)}{\sin z} = \frac{\sin(-1) - 0}{\sin(-1)} \cdot (-2) = -2 < \infty$$

Så $z = -1$ er ein enkel (simple) pol.

$$\lim_{z\to k\pi} (z-k\pi) f(z) = \lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)(z-1)(\sin z - (z+1)^2)}{(z+1)\sin z}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{z\to k\pi} \frac{((z-1)+(z-k\pi))(\sin z - (z+1)^2) + (z-k\pi)(z-1)(\cos z - 2(z+1))}{\sin z + (z+1)\cos z}$$

$$= \frac{(k\pi-1)(-(k\pi+1)^2)}{(k\pi+1)\cos k\pi} = \frac{1-k^2\pi^2}{(-1)^k} = \begin{cases} 1-k^2\pi^2 & < \infty \quad k \text{ like} \\ k^2\pi^2 - 1 & < \infty \quad k \text{ odde} \end{cases}$$

Så $z = k\pi$ er også ein enkel pol.

## 4.6.22

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - e^{2z})^2} = \frac{1}{g(z)}$$

Singulære punkt $(e^z = e^{2z})$
$z = 2k\pi i$

$g(z) = (e^z - e^{2z})^2$ har nullpunkt for $z = 2k\pi i$

$g'(z) = 2(e^z - e^{2z})(e^z - 2e^{2z})$ $\qquad g'(2k\pi i) = 0$

$\quad = 2e^{2z} - 4e^{3z} - 2e^{3z} + 4e^{4z}$

$g''(z) = 4e^{2z} - 18e^{3z} + 16e^{4z}$ $\qquad g''(2k\pi i) = 2 \neq 0$

Sidan $z = 2k\pi i$ er eit nullpunkt av orden 2 for $g(z)$, så har $f(z) = 1/g(z)$ har difor ein pol av orden 2 i $z = 2k\pi i$.

( Kan evt vise $\lim_{z\to 2\pi k i} (z-2k\pi i)^2 \cdot f(z) = 2 \neq 0$ )

## 4.6.41

f og g er analytiske på $\Omega$ og $f \cdot g \equiv 0$ på $\Omega$
Skal vise at dette medfører at enten f eller g må vere identisk lik null på heile $\Omega$.

Vi antar at verken f eller g er identisk lik null på $\Omega$, då følgjer det frå teorem 3 i kap 4.6 at alle nullpunkt til f og g er isolerte nullpunkt.
For $z_0 \in \Omega$ er $g(z_0) f(z_0) = 0$, så difor må $g(z_0) = 0$ eller $f(z_0) = 0$
Vi antar $f(z_0) = 0$. Sidan alle nullpunkta til f er isolerte, veit vi at $f(z) \neq 0$ for ei omegn av $z_0$; $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.
For at $f \cdot g = 0$ i denne omegna må difor $g(z) = 0$ for alle $z$ slik at $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Men sidan det ikkje er ei omegn rundt kvar slik $z$ der $g \neq 0$, er dette ikkje isolerte nullpunkt.
Vi har ei sjølvmotseiing, og har vist at om f og g er analytiske på $\Omega$ og $f \cdot g \equiv 0$ på $\Omega$, så må enten $f \equiv 0$ eller $g \equiv 0$ på $\Omega$.

## 5.1.20

$$\int_R \frac{1}{1+e^{\pi z}}\, dz$$

Singulære punkt er $z = (2k+1)\pi i$
Berre $z = -i$ ligg i det indre av R

Sidan vi har

$$g(z) = 1 + e^{\pi z}, \quad g'(z) = \pi e^{\pi z}, \quad g'(-i) = \pi e^{-i\pi} = -\pi$$

er $z = -i$ eit nullpunkt av orden 1 for $g(z)$, og difor ein pol av orden 1 for $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{1+e^{\pi z}}$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} (z+i) \cdot \frac{1}{1+e^{\pi z}} \overset{L'H}{=} \lim_{z \to -i} \frac{1}{\pi e^{\pi z}} = -\frac{1}{\pi}$$

Då blir:

$$\int_R \frac{1}{1+e^{\pi z}}\, dz = 2\pi i \sum_{z_j \in R} \mathrm{Res}(f, z_j) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \underline{-2i}$$

## 5.2.7

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{9+16\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{9+8(1-\cos 2\theta)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{17-8\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{-i}{2}\int_{C_1(0)} \frac{1}{17-4(z+\frac{1}{z})}\cdot\frac{1}{z}\,dz$$

$$= \frac{i}{2}\int_{C_1(0)} \frac{1}{4z^2-17z+4}\,dz$$

$$= \frac{i}{8}\int_{C_1(0)} \frac{1}{(z-\frac{1}{4})(z-4)}\,dz$$

$\varphi = 2\theta$
$d\varphi = 2\,d\theta$

$z = e^{i\varphi}$
$dz = i e^{i\varphi}\,d\varphi$
$= iz\,d\varphi$

Brukar residual til å rekne ut dette integralet. Singulære punkt er $z=\frac{1}{4}$ og $z=4$, men berre $z=\frac{1}{4}$ ligg i det indre av $C_1(0)$.

$z=\frac{1}{4}$ er ein enkel pol

$$\text{Res}\left(\tfrac{1}{4}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{4}} \left(z-\tfrac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{(z-\frac{1}{4})(z-4)} = \lim_{z\to\frac{1}{4}} \frac{1}{z-4} = \underline{-\frac{4}{15}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{9+16\sin^2\theta} = \frac{i}{8}\int_{C_1(0)} \frac{dz}{(z-\frac{1}{4})(z-4)}$$

$$= \frac{i}{8}\cdot 2\pi i\cdot \sum_{z_j\in C_1(0)} \text{Res}(z_j)$$

$$= \left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{15}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{15}}}$$

## Oppg 5.2.13

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos^2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \frac{b}{2}(1+\cos 2\theta)}$$

$$= \int_0^{4\pi} \frac{\frac{1}{2}dt}{a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\cos t} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2a+b+b\cos t} \qquad t = 2\theta$$

Sett $z = e^{it}$ $dz = ie^{it}dt$ $\cos t = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$

$$I = 2\int_{C_1(0)} \frac{dz}{iz\left(2a+b+\frac{b}{2}(z+z^{-1})\right)} = -4i\int_{C_1(0)} \frac{dz}{bz^2+2(2a+b)z+b}$$

$$bz^2 + (4a+2b)z + b = 0 \iff z = \frac{-4a-2b \pm \sqrt{16a(a+b)}}{2b}$$

$$\iff z = \frac{1}{b}\left(-2a-b \pm 2\sqrt{a(a+b)}\right)$$

$$\iff z = \frac{-1}{b}\left(\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a}\right)^2$$

Så $z_1 = \frac{-1}{b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)^2$ $z_2 = -\frac{1}{b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}\right)^2$

$$\frac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})^2}{b} > \frac{(\sqrt{2b}+\sqrt{b})^2}{b} = (\sqrt{2}+1)^2 > 1$$

Så $z_1$ er utenfor $C_1(0)$.

$$\frac{1}{b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{1+\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 < 1$$

fordi: $0 < \sqrt{1+x} - \sqrt{x} < 1$ for alle $x > 0$

Dvs. $z_2$ er inne i $C_1(0)$. Dermed

$$I = -4i \cdot 2\pi i \left[\frac{1}{2bz+4a+2b}\right]_{z=z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}}$$

## 8.2.8

$$\star \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{aligned} u(0,t) &= u(0,L) = 0 \qquad L=1 \\ u(x,0) &= x\sin \pi x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Antar $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\Rightarrow \quad XT'' = \frac{1}{\pi^2}X''T \quad \Rightarrow \quad \pi^2\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = k, \quad k \text{ ein konstant}$$

Får to likningar:

I $\quad X'' - kX = 0 \quad$ der $X(0) = X(1) = 0$

II $\quad T'' - \frac{k}{\pi^2}T = 0$

For at likning I skal ha ikkje-trivielle løysingar, må vi kreve at $k = -\mu^2 < 0$

$X'' + \mu^2 X = 0$ har løysing på forma

$$X = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \qquad$ ($c_2 = 0$ gjev berre trivielle løysingar)

$X(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \sin \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = n\pi$

Velger $c_2 = 1$, så vi har

$$X = X_n = \sin n\pi x \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Likning II blir no $\quad T'' + n^2 T = 0 \quad$ med generell løysing

$$T_n = b_n \cos nt + b_n^* \sin nt$$

Ei løysing av $\star$ er difor

$$u_n(x,t) = \sin n\pi x \left(b_n \cos(nt) + b_n^* \sin(nt)\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \left(b_n \cos(nt) + b_n^* \sin(nt)\right)$$

Brukar initialbetingelsane til å bestemme $b_n$ og $b_n^*$

(i) $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = x \sin \pi x$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n^* \sin n\pi x = 0$

Frå (ii) får vi $b_n^* = 0 \ \forall n$, frå (i) at $b_n$ er koeffisientane til sinus Fourier-utviklinga til $x \sin \pi x$, slik at

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin \pi x \sin n\pi x \, dx$$

$$b_1 = 2 \int_0^1 x \sin^2 \pi x \, dx = 2 \int_0^1 \tfrac{1}{2} ( x - x \cos 2\pi x ) \, dx$$

$$= \left[ \tfrac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4\pi^2} \cos 2\pi x + \frac{x}{2\pi} \sin 2\pi x \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 \tfrac{1}{2} ( x \cos (1-n)\pi x - x \cos (1+n) \pi x ) \, dx$$

$$= \left[ \frac{\cos (1-n)\pi x}{(1-n)^2 \pi^2} + \frac{x \sin (1-n)\pi x}{(1-n)\pi} - \frac{\cos (1+n)\pi x}{(1+n)^2 \pi^2} - \frac{x \sin (1-n)\pi x}{(1+n)\pi} \right]_0^1$$

$$= \frac{\cos (1-n)\pi}{(1-n)^2 \pi^2} - \frac{\cos (1+n)\pi}{(1+n)^2 \pi^2} - \frac{1}{(1-n)^2 \pi^2} + \frac{1}{(1+n)^2 \pi^2}$$

$$= \frac{4n}{(1-n^2)^2 \pi^2} \left( (-1)^{n+1} - 1 \right) = \begin{cases} 0 & ; n \text{ odde} \\ -\frac{8n}{(1-n^2)^2 \pi^2} & ; n \text{ like} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2} \sin \pi x \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} - \frac{16k}{(1-4k^2)^2 \pi^2} \sin 2k\pi x \cos 2kt$$

b) Dersom ein tek med dei tre første ledda i $u(x,0)$ viser figuren at det er ei god tilnærming til $x \sin \pi x$.

Den andre figuren viser $u(x,t)$ for $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 3$ og $4$

# Eks MA213 mai 2001 oppg 5

$$f(x) = |x| \quad |x| \le \pi$$

$a_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad a_n = 0$ hvis $n = 2k$

$a_n = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}$ hvis $n = 2k+1$

$b_n = 0$ pga. symmetri

b) $f$ er kontinuerlig, stykkevis glatt så Fourier rekka konvergerer uniformt

c) Fra a) har vi at for alle $x$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$x=0$ gir at

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Nå er $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$

så $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

dvs $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$