Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

0

Fasit til Midtsemestertest i MA2104 Differensiallikninger og kompleks funksjonsteori

Torsdag 20. oktober 2005 kl 0815-1000

Alle fikk samme oppgaver, men ikke alltid i samme rekkefølge. Foreløpig utgave, si fra hvis du mener noe er feil.

Oppgave 1 *(Maks 3 poeng)*

a) Finn alle løsninger av

$$(z+1)^3 = i. \quad \text{Svar: } e^{i\pi(\frac{1}{6}+\frac{2k}{3})} - 1 = \{\sqrt{3}/2 - 1 + i/2,\ -\sqrt{3}/2 - 1 + i/2,\ -i-1\}$$

b) Hva er

$$\max |z-3| \text{ når } |z-3i| \le 1? \quad \text{Svar: } 3\sqrt{2}+1$$

c) Hva er polarformen av

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)}\ ? \quad \text{Svar: } 4e^{3i\pi/2} = 4e^{-i\pi/2}$$

Oppgave 2 *(Maks 2 poeng)* Hvilke av følgende formler er rett?

$$\sinh(iz) = i\sin(z) \quad \text{Svar: ja}$$
$$\cosh^2 z + \sinh^2 z = 1 \quad \text{Svar: nei}$$
$$\sinh(2z) = 2\cosh z \sinh \mathbf{z} \quad \text{(OBS: En trykkfeil, z manglet.) Svar: ja}$$
$$\cosh(iz) = i\cos(z) \quad \text{Svar: nei}$$

Oppgave 3 *(Maks 2 poeng)*

Finn alle verdier av

a) $\log i$ Svar: $i\pi(1/2+2k), k = 0, \pm1, \cdots$

b) 2^i Svar: $e^{2k\pi}e^{i\ln 2} = e^{2k\pi}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2), k = 0, \pm1, \cdots$

Oppgave 4 *(Maks 2 poeng)* Beregn

a) $\cos i$ Svar: $1/2(e^1 + e^{-1}) = \cosh 1$

b) $\lim_{z\to i} \frac{iz+1}{(z-i)z}$ Svar: 1

Oppgave 5 *(Maks 3 poeng)*

a) Hvilke av følgende mengder er både åpne og sammenhengende? Svar ja eller nei.

$A = \{z \mid \text{Re } z > 0\}$ Svar: ja

$B = \{z \mid 0 < |\text{Im } z| < 1\}$ Svar: nei

$C = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$ Svar: ja

$D = \{z \mid 1 = |e^z|\}$ Svar: nei

b) Hvilke av mengdene er enkeltsammenhengende? Svar: A

Oppgave 6 *(Maks 2 poeng)* Oppfyller følgende funksjoner Cauchy-Riemanns likninger? Svar ja eller nei.

a)

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{Svar: ja}$$

b)

$$u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad v(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} \quad \text{Svar: nei}$$

Oppgave 7 *(Maks 2 poeng)* Beregn

a)

$$\int_{C_2(i)} \frac{dz}{z+1/2} \quad \text{Svar: } 2\pi i$$

b)

$$\int_{C_{3/2}(i)} \frac{dz}{z^2+1} \quad \text{Svar: } \pi$$

Oppgave 8 *(Maks 1 poeng)* La C være en enkel, lukket vei som er positivt orientert. Hvilke mulige verdier har da følgende kurveintegral:

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2}\,dz \qquad \text{(OBS: En trykkfeil, } C=\gamma.\text{) Svar: 0 eller } 2\pi i$$

Oppgave 9 *(Maks 2 poeng)* Konvergerer disse følgene når $n \to \infty$? Svar ja eller nei.

a) $\frac{n}{n+2i}$ Svar: ja

b) $(\frac{1+3i}{3})^n$ Svar: nei

c) $\frac{\cosh(in)}{n}$ Svar: ja

d) $(\frac{4+i3}{5})^n$ Svar: nei

Oppgave 10 *(Maks 2 poeng)* For hvilke verdier av z konvergerer følgende rekker:

a) $\sum_0^\infty (in+1)z^n$ Svar: $|z|<1$

b) $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n(n+1)}$ Svar: $|z| \le 1$

Oppgave 11 *(Maks 3 poeng)* La f være en kompleks funksjon definert i et område Ω og γ en enkel lukket vei i Ω. Hvilke av følgende påstander er riktige? Svar ja eller nei.

a) Hvis f er analytisk i Ω, så er $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Svar: nei

b) Hvis $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ for alle enkle lukkete veier i Ω, så er f analytisk i Ω. Svar: ja

c) Hvis $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ for alle enkle lukkete veier i Ω, så er Ω enkeltsammenhengende. Svar: nei