



Midtsemestertest i MA2104 Differensiallikninger og kompleks funksjonsteori
Onsdag 20. oktober 2004 kl 0815-1000

Før på studentnummer. Svarene skrives inn direkte på oppgavearket. Svarene skal ikke begrunnes. (OBS: Alle har fått samme oppgaver, men ikke nødvendigvis i samme rekkefølge.)

Oppgave 1

a) Hva er

$$\max \frac{1}{|z-2|} \text{ når } |z-i| \leq 1?$$

b) Hva er polarformen av

$$\frac{i}{(1+i\sqrt{3})^5} ?$$

c) Finn alle løsninger av

$$(z-i)^4 = 1. \quad \text{Svar:}$$

Oppgave 2

a) Hvilke av følgende formler er rett?

$$\cosh(iz) = i \cos(z)$$

$$\sinh(iz) = i \sin(z)$$

$$\cosh(2z) = \cosh^2 z - \sinh^2 z$$

$$\sinh(2z) = 2 \cosh z \sinh z$$

b) Finn alle verdier av

$$i^i \quad \text{Svar:}$$

$$(-e)^{i/2} \quad \text{Svar:}$$

- c) For hver av følgende mengder, angi om den er åpen, lukket, sammenhengende, enkelt-sammenhengende:

$$A = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\} \quad \text{Svar:}$$

$$B = \{z \mid |\operatorname{Im} z| \geq 1\} \quad \text{Svar:}$$

$$C = \{z \mid 0 < |z| \leq 1\} \quad \text{Svar:}$$

$$D = \{z \mid 1 < |e^z|\} \quad \text{Svar:}$$

Oppgave 3 Finn (hvis mulig) en funksjon $v(x, y)$ slik at $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ er analytisk der

a) $u(x, y) = \frac{1}{x+y}$ Svar:

b) $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ Svar:

Oppgave 4 Over hvilke av følgende kurver er $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = 0$?

a) $C_1(1)$

b) $C_1(0)$

c) $C_1(i)$

d) $C_2(1)$

Oppgave 5 Bestem hvilke følger som konvergerer når $n \rightarrow \infty$.

a) $\frac{1}{n+2i}$

b) $\frac{\sin(in)}{n}$

c) $\left(\frac{1+3i}{4}\right)^n$

d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

Oppgave 6 Finn konvergensradius R for rekka $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ når

a) $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$

b) $a_n = (1 + i^n)^n$

c) $a_n = n + i$

d) $a_n = n^n$

Oppgave 7 Hva blir konvergensradius for MacLaurin rekka til følgende funksjoner:

a) $\tan z$

b) $\frac{1}{z^2+z+1}$

c) $\frac{\sin z}{z}$

d) $\text{Log}(z + 2i)$

Oppgave 8 Gitt rekka $\sum_0^\infty (z - i)^n$. Over hvilke av følgende områder konvergerer rekka uniformt?

a) $B_1(i)$

b) $B_{1/2}(i)$

c) $B_{1/2}(0)$

d) $B_{1/2}(i/2)$