Løsningsforslag MA1201/MA6201 høst 2011

Oppgave 1

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [2\cdot 2-(-1)(3)]\,\mathbf{i} - [3\cdot 2-(-1)(-1)]\,\mathbf{j} + [3\cdot 3-2\cdot(-1)]\,\mathbf{k}$$

$$= 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k} = \underline{\underline{(7,-5,11)}}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u},\ \overrightarrow{PR} = \mathbf{v} \Rightarrow \text{Areal} = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\| = \tfrac{1}{2}\|(7,-5,11)\|$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{7^2+(-5)^2+11^2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{195}}}$$

Oppgave 2

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ 2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} -2 & 1 \\ \leftarrow & \\ & \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot -1 \\ \\ \end{array} \to \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}} \leftarrow \text{Redusert trappeform}$$

b)
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ x_1+3x_3 & x_2+3x_4 \end{bmatrix}}}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} x_1+x_2 & 2x_1+3x_2 \\ x_3+x_4 & 2x_3+3x_4 \end{bmatrix}}}$$

For å få $AB = BA$ må vi ha:

$$\begin{aligned} x_1+2x_3 &= x_1+x_2 \\ x_2+2x_4 &= 2x_1+3x_2 \\ x_1+3x_3 &= x_3+x_4 \\ x_2+3x_4 &= 2x_3+3x_4 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} 0x_1+1x_2-2x_3+0x_4 &= 0 \\ 2x_1+2x_2+0x_3-2x_4 &= 0 \\ -1x_1+0x_2-2x_3+x_4 &= 0 \\ 0x_1-1x_2+2x_3+0x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet svarer til totalmatrisen i a)
Redusert trappeform gir da

$x_1 + 2x_3 - x_4 = 0$ og $x_2 - 2x_3 = 0$

Innfører $x_3 = s$ og $x_4 = t$. En vilkårlig løsning blir på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in R$$

Oppgave 3

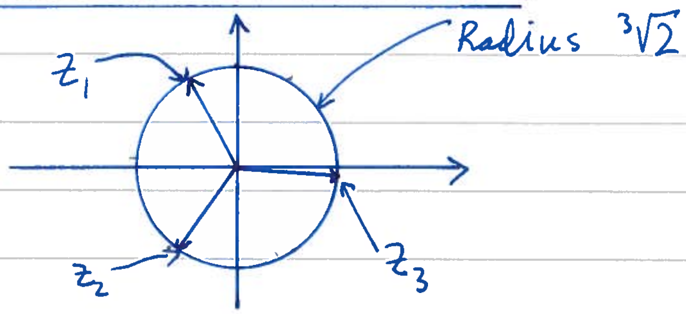
Modulus: $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Argument: $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$ eller $\frac{11\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$

La $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Da er $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$, som gir $r^3 = 2$ og $3\theta = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18}\right) \\ z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18}\right) \\ z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{35\pi}{18} + i \sin \frac{35\pi}{18}\right) \end{cases}$$



b) La $z_1 = a_1 + b_1 i$ og $z_2 = a_2 + b_2 i$.

1) $z_1 + z_2 \in R \iff (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in R \iff b_1 + b_2 = 0$
$\iff b_2 = -b_1$

2) $z_1 \cdot z_2 \in R \iff (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \in R$
$\iff a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0$

1) Innsatt i 2): $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} \iff a_1(-b_1) + b_1 a_2 = 0 \Rightarrow b_1(a_2 - a_1) = 0$

$\iff b_1 = 0$ eller $a_2 = a_1$

Det gir at komplekse tall (z_1, z_2) slik at $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ og $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ er gitt ved:

$$\{(a_1, a_2), (a_1 + b_1 i, a_1 - b_1 i) \mid a_i, b_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\underline{= \{(a_1, a_2), (z, \bar{z}) \mid a_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}}$$

Oppgave 4

a) $\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \frac{50}{13^2} & -\frac{120}{13^2} \\ -\frac{120}{13^2} & \lambda - \frac{288}{13^2} \end{bmatrix}\right)$

$$= \left(\lambda - \frac{50}{13^2}\right)\left(\lambda - \frac{288}{13^2}\right) - \frac{120^2}{13^2} = \lambda^2 - \frac{50+288}{13^2}\lambda + \frac{50 \cdot 288}{13^4} - \frac{120^2}{13^2}$$

$$= \lambda^2 - \frac{338}{13^2}\lambda = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{Egenverdier } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0}$

Har $A\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{13^2}\begin{bmatrix} 250 + 1440 \\ 600 + 3456 \end{bmatrix} = \frac{1}{13^2}\begin{bmatrix} 1680 \\ 4056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{13^2}\begin{bmatrix} 50(-12) + 120 \cdot 5 \\ 120(-12) + 288 \cdot 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow$ $\underline{\mathbf{x}_1 \text{ egenvektor for } \lambda_1 \text{ og } \mathbf{x}_2 \text{ egenvektor for } \lambda_2}$

b) $\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ og $\|\mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{x}_1\| = 13$.

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 5/13 & -12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$, har $\det P = 1$.

c) Har at $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50/13^2 & 120/13^2 \\ 120/13^2 & 288/13^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 50/13^2 x + 120/13^2 y & 120/13^2 x + 288/13^2 y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{50}{13^2}x^2 + \frac{120}{13^2}xy + \frac{120}{13^2}xy + \frac{288}{13^2}y^2 = Q(x,y)$$

$\Rightarrow$ $\underline{a = \frac{50}{13^2},\ b = \frac{120}{13^2},\ c = \frac{288}{13^2}}$

d) La $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ (der $\mathbf{x}'$ er de nye koordinatene. Vet fra teorien at

$$Q(x,y) = [x' \ \ y'] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2x'^2$$

Har $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13}x' - 12/13\, y' \\ \frac{12}{13}x' + \frac{5}{13}y' \end{bmatrix}$. Spesielt, $y = \frac{12}{13}x' + \frac{5}{13}y'$.

Innsatt: $2x'^2 - 13\left(\frac{12}{13}x' + \frac{5}{13}y'\right) + 1 = 0$

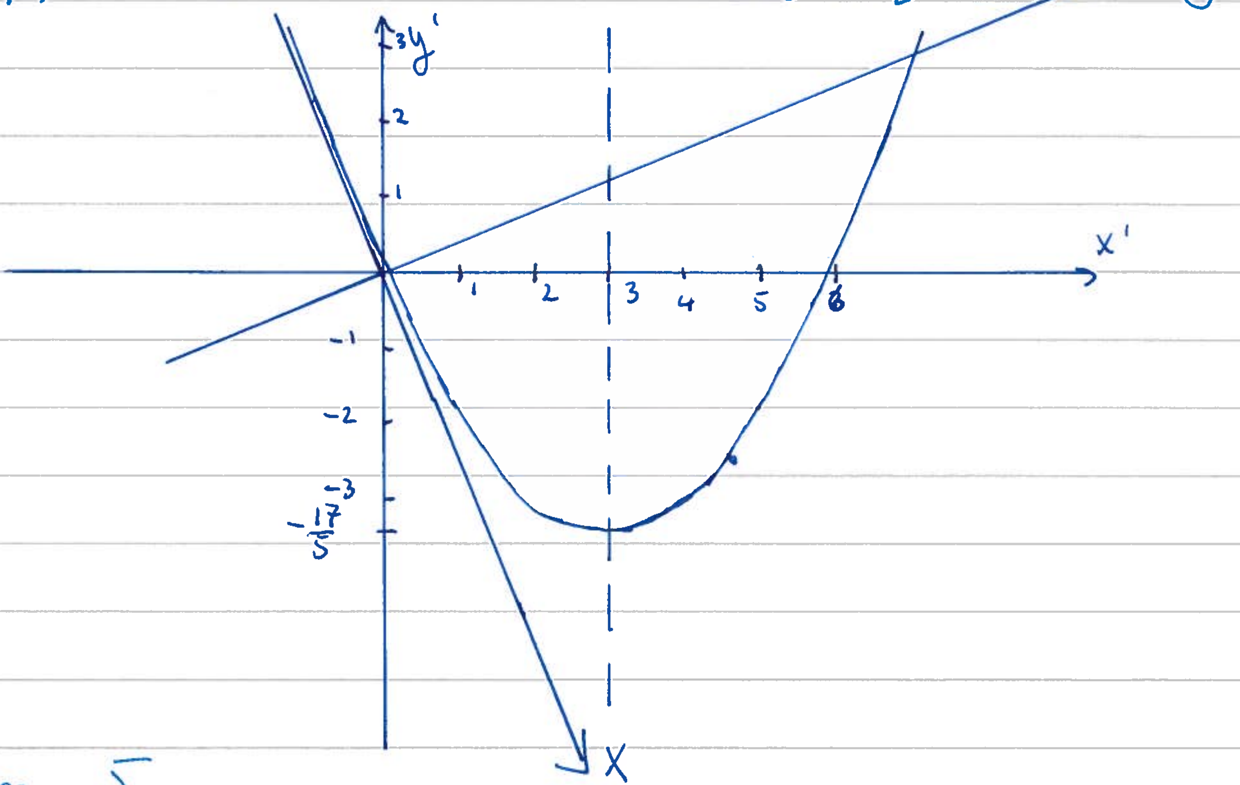
$\Rightarrow 2x'^2 - 12x' - 5y' + 1$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{5}\left[2(x'^2 - 6) + 1\right] = \frac{1}{5}\left[2(x'-3)^2 - 17\right]$

$= \frac{2}{5}(x'-3)^2 - \frac{17}{5}$

$(1,0)$ i $x'y'$-planet svarer til $P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

$(0,1)$ —— " —— $P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$



Oppgave 5

a) Anta at $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er parallelle. Siden $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er forskjellig fra 0, så er det ekvivalent med at $\exists\, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ slik at $\mathbf{x}_1 = c\mathbf{x}_2$. Dette gir

$M\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$ (λ_1 egenverdi for $\mathbf{x}_1$)

$Mc\mathbf{x}_2 = cM\mathbf{x}_2 = c\lambda_2\mathbf{x}_2$ (λ_2 egenverdi for $\mathbf{x}_2$)

$= \lambda_2 c\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1$

dvs. $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_1$, eller ekvivalent med $(\lambda_1 - \lambda_2) x_1 = 0$. Dette gir $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ eller $x_1 = 0$. Siden $x_1 \neq 0$, så må $\lambda_1 = \lambda_2$. Dette er en selvmotsigelse og følgelig x_1 og x_2 er ikke parallelle og $\det(P) \neq 0$. $\square$

b) Har at $ABx_1 = BAx_1 = B\lambda_1 x_1 = \lambda_1 Bx_1$.
Hvis $Bx_1 = 0$, så er x_1 en egenvektor for B med egenverdi 0. Hvis $Bx_1 \neq 0$, så er Bx_1 en egenvektor for A med egenverdi λ_1. Vet at ligningssystemet $(\lambda_1 I - A)x = 0$ har minst en ikke-triviell løsning, dvs. minst en fri ukjent. Hvis $\lambda_1 I - A$ har to "ikke-trivielle løsninger" eller to frie ukjente, så må redusert trappeform til $\lambda_1 I - A$ være nullmatrisen. Men det skjer bare hvis en starter med nullmatrisen, dvs. $A = \lambda_1 I$. Matrisen $\lambda_1 I$ har ikke to forskjellige egenverdier, slik at $A \neq \lambda_1 I$ og $(\lambda_1 I - A)x = 0$ har kun én ikke-triviell løsning, $\{c x_1\}_{c \in \mathbb{R}}$. Dette gir at $Bx_1 = c_1 x_1$ for en $c_1 \in \mathbb{R}$, dvs. x_1 er en egenvektor for B med egenverdi c_1. $\square$

Tilsvarende har vi at x_2 er en egenvektor for B, dvs. B har to egenvektorer. x_1 og x_2 med tilhørende egenverdier c_1 og c_2, og der $P = [x_1 | x_2]$ er invertibel. Vi har sett at (i kurset)

$$BP = P\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

slik at $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, dvs. B er diagonaliserbar. $\square$