Et nytt tallsystem

Vi skal nå innføre et nytt tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Skal vi innføre et nytt tallsystem, så må vi spørre oss hvilke egenskaper ønsker vi at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:
- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutative*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:
- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *venstre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at

$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$

- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at

$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$

- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La

$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

For eksempel,

$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$

og

$$Y = A - \sqrt{2} A^3$$

er elementer i S.

(a) La $X = a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$ og $Y = b_0 I_2 + b_1 A + b_2 A^2 + b_3 A^3$ være elementer i S. Vis at
  (i) I_2 er i S og $0_{2\times 2}$ er i S.
  (ii) $X - Y$ er i S.
  (iii) XY er i S.

(b) Forklar uten regning hvorfor vi har følgende:
- $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
- $X + Y = Y + X$,

- Det eksisterer 0_S i S slik at

$$0_S + X = X = X + 0_S,$$

- Gitt X i S, så eksisterer det X' i S slik at

$$X + X' = 0_S = X' + X.$$

- $X(YZ) = (XY)Z,$
- $X(Y + Z) = XY + XZ,$
- $(X + Y)Z = XZ + YZ,$
- $I_2X = X = XI_2,$

for alle X, Y og Z i S.

(c) La X og Y være som i punkt (a). Vis at

$$X \cdot Y = Y \cdot X.$$

(d) Vis at vi har
  (i) $0 = I_2 - A^4 = (I_2 - A)(I_2 + A)(I_2 + A^2)$.
  (ii) Anta at $\det(I_2 - A) \neq 0$ og at $\det(I_2 + A) \neq 0$. Vis at $I_2 + A^2 = 0$, dvs. $A^2 = -I_2$.

(e) Anta at $A^2 = -I_2$. Vis at da er

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix},$$

for a og b i $\mathbb{R}$, der $b \neq 0$.

(f) Anta at $A^2 = -I_2$. Vis at

$$S = \{a_0I_2 + a_1A \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Vis at

$$(a_0I_2 + a_1A)(b_0I_2 + b_1A) = (a_0b_0 - a_1b_1)I_2 + (a_0b_1 + a_1b_0)A.$$

(g) Anta at $b > 0$ og la

$$P = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{b}} & \sqrt{b} \\ -\frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \end{bmatrix}$$

når $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$. Vis at

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(h) Vis at $\det(a_0I_2 + a_1A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_0+a_1a & a_1b \\ -\frac{a_1(1+a^2)}{b} & a_0-a_1a \end{bmatrix}\right) = a_0^2 + a_1^2$.

(i) For hvilke elementer X i S eksisterer det X' slik at

$$XX' = I_2 = X'X?$$

Hvis $X = a_0I_2 + a_1A = \begin{bmatrix} a_0+a_aa & a_1b \\ -\frac{a_1(1+a^2)}{b} & a_0-a_1a \end{bmatrix}$ og a_0 og a_1 er slik at X' eksisterer, hva er X'? Er X' igjen i S?

(j) La $R = \{(a_0, a_1) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $R = \mathbb{R}^2$. Definer *addisjon* i R som addisjon i $\mathbb{R}^2$, dvs.

$$(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

Definer en operasjon som vi kaller *multiplikasjon* i R ved at

$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0 - a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0).$$

La $x = (a_0, a_1)$, $y = (b_0, b_1)$ og $z = (c_0, c_1)$ i R. Forklar uten regning hvorfor følgende holder:

- $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- $x + y = y + x$,
- Det eksister 0_R i R slik at
$$0_R + x = x = x + 0_R,$$
- Gitt x i R, så eksisterer det x' i R slik at
$$x + x' = 0_R = x' + x,$$
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
- Det eksisterer 1_R i R slik at
$$1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R,$$
- $x \cdot y = y \cdot x$,

for alle x, y og z i R.

(k)
- Hva er 0_R i R?
- Hva er 1_R i R?
- La $i = (0, 1)$ i R. Vis at $i^2 = -1_R$.
- La $x = (a_0, a_1)$ være i R der $x \neq (0, 0)$. Finnes det en x' i R slik at $x \cdot x' = 1_R = x' \cdot x$?

(l) Hva har vi gjort i (a)–(k)?