Løsningsforslag Midtsemesterprøve MA1201 - 2015

Oppgave 1

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{array} \begin{array}{c} \\ -2 \; -5 \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \quad \underline{\underline{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}}$$

Oppgave 2 B

Oppgave 3

$$\begin{array}{l} y + 3z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ 3y - z = 20 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 20 \end{array} \begin{array}{c} -1 \; -3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \cdot -\frac{1}{10} \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -3 \; 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \sim \underline{\underline{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 1 \end{array}}}$$

Oppgave 4

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ -2 \; -5 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Invers: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}}}$

Oppgave 5

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right) -2 = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & -4 & -5 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ -5 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -5 & -5 & -6 \end{bmatrix}\right) 1 = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) -6 \; -3$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = -(2\cdot 1 - 5\cdot 1) = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 6

$AB \rightarrow \boxed{G}$, $A + A^T \rightarrow \boxed{C}$, $AB - BA \rightarrow \boxed{C}$

Oppgave 7

$\boxed{A}$ og $\boxed{E}$

Oppgave 8

$\boxed{B}$ og $\boxed{D}$

Oppgave 9.

Anta at $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$. Da er $\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, slik at $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ er løsning i det homogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Oppgave 10

La A være en $m \times n$-matrise over $\mathbb{R}$, slik at det eksisterer en matrise B med $AB = I_m$.

(a) Multipliser likheten $AB = I_m$ med $\mathbf{b}$ fra høyre og vi får at

$$AB\mathbf{b} = I_m \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Dette gir at $\cancel{x}B\mathbf{b}$ er en løsning ~~av~~ av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dette holder for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$, slik at påstanden i (a) er vist.

(b) Redusert trappeform av A oppnåes ved å multiplisere med elementære matriser fra venstre, la oss si, $E_t, E_{t-1}, \ldots, E_2, E_1$. Dette gir systemet

$$E_t \cdots E_2 E_1 A \mathbf{x} = E_t \cdots E_2 E_1 \mathbf{b}$$

Siden E_i er invertible matriser for alle $i = 1, 2, \ldots, t$, da vil vi for $\mathbf{b} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_t^{-1} \mathbf{b}'$ ha at

$$E_t \cdots E_2 E_1 \mathbf{b} = \underbrace{E_t \cdots \overbrace{E_2 \underbrace{E_1 E_1^{-1}}_{I} E_2^{-1}}^{I} \cdots E_t^{-1}}_{I} \mathbf{b}' = \mathbf{b}'$$

for alle $\mathbf{b}'$ i $\mathbb{R}^m$. Dette medfører at ligningssystemet

(*) $E_t \cdots E_2 E_1 A \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ er løsbart for alle $\mathbf{b}'$ i $\mathbb{R}^m$. Da må antall ledende enere i den reduserte trappeformen være lik det maksimale antallet, nemlig m. Ellers ville matrisen $E_t \cdots E_2 E_1 A$ ha en nullrad og (*) ville ikke være løsbar for alle $\mathbf{b}'$ i $\mathbb{R}^m$. Det maksimale antall ledende enere i en $m \times n$-matrise er minimum av m og n. Det følger av dette at $m \leq n$.