Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
(73 59 17 50)

MA

TMA4150/2201 ALGEBRA OG TALLTEORI

Dato Mandag 19. mai 2008
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Enkel lommeregner og utdelt figur
Settet innholder 5 oppgaver dere skal løse. Oppgavene 1, 2, 3 og 4 eller oppgavene 1, 2, 3 og 5. Bokmål

Sensur: 9. juni 2008

Oppgave 1 Betrakt de hele tall $\mathbb{Z}$ og definer den binære operasjonen $\oplus$ på $\mathbb{Z}$ ved at $a \oplus b = a + b + 2$ der $+$ står for vanlig addisjon av hele tall.

a) Vis at $(\mathbb{Z}, \oplus)$ blir en abelsk gruppe.

b) Vis at $(\mathbb{Z}, \oplus)$ er isomorf med den sykliske gruppen $(\mathbb{Z}, +)$.

Oppgave 2 La p være et primtall og la

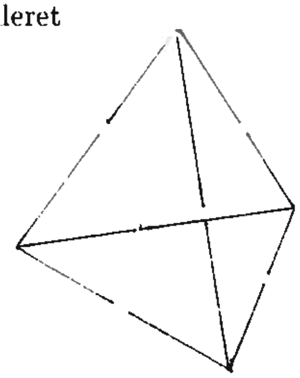
$$G_p = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \gcd(a, b) = 1, p \nmid b\}.$$

a) Vis at G_p er en undergruppe av $(\mathbb{Q}, +)$.

b) Vis at $M_p = \{\frac{a}{b} \in G_p \mid p \mid a\}$ er en undergruppe av G_P.

c) Finn indeksen $[G_p : M_p]$ av M_p i G_p og avgjør hvilken kjent gruppe fra læreboka G_p/M_p er isomorf med.

Oppgave 3 Betrakt tetraederet



der hver kant er delt i to like lange deler. La gruppen av rotasjoner av tetraederet virke på mengden bestående av de 12 kanthalvdelene.

a) Skriv ned virkningen av denne gruppa som permutasjoner på de 12 kanthalvdelene.

b) Finn antall fargelegginger av disse kanthalvdelene nar 3 farger er tilgjengelige der to fargelegginger betraktes som like dersom de kan roteres over i hverandre.

Oppgave 4 (Sylow-teori) Betrakt kroppen $\mathbb{Z}_3$ og gruppa

$$GL_2(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, ad - bc \neq 0 \right\}$$

bestående av alle inverterbare 2×2-matriser over $\mathbb{Z}_3$ under multiplikasjon.

a) Vis at $|GL_2(\mathbb{Z}_3)| = 48$

b) Vis at $\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, a \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ er en Sylow-3-undergruppe i $GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

c) Finn antall Sylow-3-undergrupper i $GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

(HINT: Vis at $g \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) g^{-1}$ har orden 3 for alle $g \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$.)

Oppgave 5 Betrakt kroppen $\mathbb{Z}_7$

a) Avgjør for hvilke a i $\mathbb{Z}_7$ polynomet $X^2 + aX + 3$ er irreduktibelt i $\mathbb{Z}_7[X]$.

b)

La $M_2(\mathbb{Z}_7) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}_7 \right\}$ være ringen av 2×2 – matriser over $\mathbb{Z}_7$.

Betrakt matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$ og definer $\phi : \mathbb{Z}_7[X] \to M_2(\mathbb{Z}_7)$ ved $\phi(f) = f\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Finn kjernen, $ker\phi$, til ϕ.

c) Vis at bildet til ϕ er en kropp med 49 elementer bestaende av elementene

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^i \mid i = 1, \cdots, 48 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
(73 59 17 50)

MA2201 ALGEBRA

Dato: Mandag 1. desember 2008
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Enkel lommeregner og utdelt figur
Settet inneholder 4 oppgaver som dere skal løse. Bokmål

Sensur: 9. desember 2008

Oppgave 1 Betrakt de reelle tall $\mathbb{R}$ og definer den binære operasjonen $\oplus$ på $\mathbb{R}$ ved at $a \oplus b = a + b + 3$ der $+$ står for vanlig addisjon av reelle tall.

a) Vis at $(\mathbb{R}, \oplus)$ er en abelsk gruppe.

b) Vis at $(\mathbb{R}, \oplus)$ er isomorf med gruppen $(\mathbb{R}, +)$.

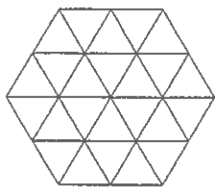
Oppgave 2 Betrakt mengden $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$ av to ganger to-matriser med heltallskoeffisienter slik at determinanten er 1.

a) Vis at $SL_2(\mathbb{Z})$ er en gruppe under matrisemultiplikasjon.

b) Finn ordenen til elementene $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ og ab.

c) La A være gruppa generert av a i punktet ovenfor og B være gruppa generert av b. Finn indeksen til $A \cap B$ i A og i B og avgjør hvilke kjente grupper fra læreboka $A/(A \cap B)$ og $B/(A \cap B)$ er isomorfe med.

Oppgave 3 Betrakt følgende figur



som er tenkt laget av glass og la den dihedrale gruppa D_6 bestående av 12 elementer virke på denne ved rotasjoner i rommet.

a) Skriv ned virkningen av denne gruppa som permutasjoner på de 24 småtrekantene på figuren.

b) Finn antall fargelegginger av disse 24 småtrekantene som finnes når 3 farger er tilgjengelig og når to fargelegginger betraktes som like dersom de kan roteres over i hverandre i rommet.

Oppgave 4 Betrakt kroppen $\mathbb{Z}_5$ og gruppa

$$SL_2(\mathbb{Z}_5) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5, ad - bc = 1\}$$

bestående av alle 2×2-matriser over $\mathbb{Z}_5$ med determinant 1 under matrisemultiplikasjon.

a) Vis at $|SL_2(\mathbb{Z}_5)| = 120$.

b) Vis at $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}_5\right\}$ er en Sylow-5-undergruppe i $SL_2(\mathbb{Z}_5)$.

c) Finn antall Sylow-5-undergrupper i $SL_2(\mathbb{Z}_5)$.