TMA4150 - OPPGAVESETT 12 - Ailo Aasen

SEKSJON 22

1 $f(x)g(x) = (4x-5)(2x^2-4x+2) = 4\cdot 2x^3 + (-5\cdot 2 - 4\cdot 4)x^2 + (4\cdot 2 - 4(-5))x - 5\cdot 2 = 6x^2+4x+6$

$f(x)+g(x) = 2x^2+5$

2 $f(x)g(x) = (x+1)(x+1) = x^2 + (1+1)x + 1^2 = x^2+1$

$f(x)+g(x) = (1+1)x + (1+1) = 0$

3 $f(x)g(x) = (2x^2+3x+4)(3x^2+2x+3)$

$= (2\cdot 3)x^4 + (2\cdot 2 + 3\cdot 3)x^3 + (2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3)x^2 + (4\cdot 2 + 3\cdot 3)x + 4\cdot 3$

$= x^3 + 5x$ $\equiv 0$

$f(x)+g(x) = (2+3)x^2 + (3+2)x + (4+3) = 5x^2+5x+1$

6 Alle slike polynomer er på formen $a_2x^2+a_1x+a_0$ for noen $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}_5$. Tar vi med 0 er det klart at det er $5\cdot 5\cdot 5 = 125$ slike polynomer

9 $\phi_3[(x^4+2x)(x^3-3x^2+3)] = \phi_3(x^4+2x)\phi_3(x^3-3x^2+3) =$

$(3^4+2\cdot 3)(3^3-3\cdot 3^2+3) = (4+6)(6-6+3) = 3\cdot 3 = 2$

14 La $f(x) = x^5+3x^3+x^2+2x \in \mathbb{Z}_5[x]$. Da er

$\phi_1(f(x)) = 1^5+3\cdot 1^3+1^2+2\cdot 1 = 1+3+1+2 = 2$

$\phi_2(f(x)) = 2^5+3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2 = 2+4+4+4 = 4$

$\phi_3(f(x)) = 3^5 + 3\cdot 3^3 + 3^2 + 2\cdot 3 = 3 + 1 + 4 + 1 = 4$

$\phi_4(f(x)) = 4^5 + 3\cdot 4^3 + 4^2 + 2\cdot 4 = 4 + 2 + 1 + 3 = 0$

Det er klart at $\phi_0(f(x)) = 0$, så nullpunktene er 0 og 4

17 Hvis $a \neq 0$ er i $\mathbb{Z}_5$, gir Fermats teorem $a^4 = 1$, så

$2x^{219} + 3x^{74} + 2x^{57} + 3x^{44} = 2(x^4)^{54}x^3 + 3(x^4)^{18}x^2 + 2(x^4)^{14}x + 3(x^4)^{11}$

$= 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ når $x \neq 0$. Lar vi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$, er

$\phi_1(f(x)) = 2 + 3 + 2 + 3 = 0$

$\phi_2(f(x)) = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3 = 1 + 2 + 4 + 3 = 0$

$\phi_3(f(x)) = 2\cdot 2 + 3\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3 = 4 + 2 + 1 + 3 = 0$

$\phi_4(f(x)) = 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 2$

Så røttene er 0, 1, 2 og 3

22 I $\mathbb{Z}_4[x]$ er $(2x+1)$ en enhet, siden

$(2x+1)(2x+1) = 2\cdot 2x^2 + (2+2)x + 1^2 = 1$

24 La D være et integritetsområde, og la $f(x)$ og $g(x)$ være i $D[x]$. Anta grad$(f(x)) = n$, grad$(g(x)) = m$, så $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, der $a_n \neq 0$ og $b_m \neq 0$. Siden D er en kommutativ ring med 1, følger det at $D[x]$ er en kommutativ ring med 1.

For å vise at $D[x]$ er et integritetsområde, må vi vise at $f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \neq 0$. Men hvis begge polynomene er ulik 0, må a_n og b_m være ulik 0, så $a_n b_m \neq 0$ siden D er int. område. Så koeffisienten til x^{n+m} i $f(x) \cdot g(x)$ er ulik 0 og $f(x)g(x) \neq 0$ $\blacksquare$ de

SEKSJON 23

1

$$
\begin{array}{r}
x^4 + x^3 + x^2 + x - 2 \\
(x^2+2x-3) \overline{\smash{)}\, x^6 + 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 3x + 2} \\
\underline{x^6 + 2x^5 - 3x^4} \\
x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\
\underline{x^5 + 2x^4 - 3x^3} \\
x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
x^3 + 0x^2 - 3x + 2 \\
\underline{x^3 + 2x^2 - 3x} \\
-2x^2 + 0x + 2 \\
\underline{-2x^2 - 4x + 6} \\
4x + 3
\end{array}
$$

Så $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$, $r(x) = 4x + 3$ de

2

$$
\begin{array}{r}
5x^4+5x^2-x \\
3x^2+2x-3 \,\big)\, x^6+3x^5+0x^4+0x^3+4x^2-3x+2 \\
\underline{x^6+3x^5-x^4} \qquad\qquad\qquad\quad \\
x^4+0x^3+4x^2-3x+2 \\
\underline{x^4+3x^3-x^2} \qquad\quad\;\; \\
-3x^3+5x^2-3x+2 \\
\underline{-3x^3-2x^2+3x} \quad \\
x+2
\end{array}
$$

de

$q(x) = 5x^4+5x^2-x$, $r(x) = x+2$

9 $x^4+4 = x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2-4)$

$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

de

12 x^3+2x+3 er redusibelt siden $\phi_{-1}(x^3+2x+3) = -1-2+3 = 0$, så $(x+1)$ er en faktor. Polynomdivisjon gir

$$
\begin{array}{r}
x^2-x+3 \\
(x+1) \,\big)\, x^3+0x^2+2x+3 \\
\underline{x^3+x^2} \qquad\qquad \\
-x^2+2x+3 \\
\underline{-x^2-x} \qquad \\
3x+3 \\
\underline{3x+3} \\
0
\end{array}
$$

faktoriseringen $x^3+2x+3 = (x+1)(x^2-x+3)$. Vi ser dessuten at $x^2-x+3 = (x-2)(x-4)$, så vi får $\underline{\underline{x^3+2x+3 = (x-4)^2(x-2)}}$

de

2b | Utfører først polynomdivisjonen i $\mathbb{Z}[x]$:

$$
\begin{array}{r}
x^3 - x^2 + 3x - 7 \\
x+2 \overline{\smash{\big)}\, x^4 + x^3 + x^2 - x + 1} \\
\underline{x^4 + 2x^3 } \\
-x^3 + x^2 \\
\underline{-x^3 - 2x^2 } \\
3x^2 - x \\
\underline{3x^2 + 6x } \\
-7x + 1 \\
\underline{-7x - 14} \\
15
\end{array}
$$

Så $x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2 + 3x - 7)(x+2) + 15$. Siden $15 = 3 \cdot 5$, er $x+2$ en faktor hvis og bare hvis $p = 3$ eller $p = 5$.

3b | Divisjonsalgoritmen gir $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$, der $r(x) = 0$ eller $0 \leq \text{grad}(r(x)) < \text{grad}(x-\alpha) = 1$. Så vi må ha $\text{grad}(r(x)) = 0 \Rightarrow r(x) = r \in F$, så $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r$.

$\phi_\alpha(f(x)) = \phi_\alpha((x-\alpha)q(x) + r) = r = \alpha$. Så resten er α.

EKSAMENSOPPGAVER

1 a) Fund. teorem for end. gen. abelske grupper gir at de eneste mulighetene er $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Elementene u i $\mathbb{Z}_{16}$ som genererer hele gruppen er nøyaktig de som er rel. primske med 16. Elementene er 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. ok

b) $(a,b,c), (d,e,f) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \Rightarrow (a,b,c)(d,e,f) = (ad, be, cf)$.

Siden multiplikasjonen i denne gruppen skjer komponentvis, er det klart at (a,b,c) er en enhet hvis og bare hvis a, b, c er enheter i sine respektive grupper. Siden $\phi(6) = 2$, $\phi(4) = 2$ og $\phi(10) = 4$, er det $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ enheter, så $|G| = 16$. Det følger også at $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ Bra!

3 a) Lukket: La $A, B \in H$. $\det(AB) = \det(A)\det(B) = (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1$, så H er lukket

Identitet: $\det(I_3) = 1$, så H har identitet.

Invers: $A \in H \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\pm 1} = \pm 1$, så inverser finnes

La nå $X \in H$, $Y \in G$. Da er $\det(YXY^{-1}) =$
$\det(Y)\det(X)\det(Y^{-1}) = \det(X) = \pm 1$, så $YXY^{-1} \in H$. ok

Derfor er H en normal undergruppe av G.

b) Definer $\psi : G/H \to \mathbb{R}^+$ med $\psi(AH) = |\det(A)|$.

Vis at $\ker \varphi : G \to \mathbb{R}^+$ har H som kjerne heller. Så gir 3 iso. at $G/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$

1-1: $|\det(A)| = |\det(B)| \Rightarrow \det(A) = \pm\det(B) \Rightarrow$
$\pm 1 = \det(A^{-1}B) \Rightarrow A^{-1}B \in H \Rightarrow B \in AH \Rightarrow AH = BH$.

På: For $c \in \mathbb{R}^+$, la C være en matrise i G med determinant c, f.eks $\sqrt[3]{c}\, I$. Da er
$\psi(CH) = |\det(C)| = |c| = c$.

Homomorfi: $\psi(AH)\psi(BH) = |\det(A)||\det(B)| = |\det(AB)|$
$= \psi((AB)H) = \psi((AH)(BH))$.

Så $G/H \cong \mathbb{R}^+$ ok

c) Nei; $I \notin K$, så K mangler identitet. ok

4 La e være identiteten i G. Da er $e * aH = (ea)H$
$= aH$, for alle $aH \in X$.

La $g_1, g_2 \in G$, $aH \in X$. Da er $(g_1 g_2) * aH =$
$(g_1 g_2 a)H = g_1 * (g_2 a)H$ ok

Vi har vist at $e * x = x \; \forall x \in X$, og at
$(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) \; \forall g_1, g_2 \in G$. Så X er en G-mengde.