Øving 2

S.48

no. 30. $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $a * b \overset{def}{=} |a| \cdot b$

a) $*$ associativ:

$$a*(b*c) = a*(|b|\cdot c) = |a|\cdot|b|\cdot c$$

$$(a*b)*c = (|a|\cdot b)*c = \big||a|\, b\big|\cdot c = |a|\cdot|b|\cdot c$$ } like, så ok.

b) ℓ venstre identitet, dvs $\ell * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

$$x = \ell * x = |\ell|\cdot x \iff |\ell| = 1 \iff \ell = \pm 1$$

$x \in \mathbb{R}^*$, x_h høyre invers, dvs $x * x_h = \ell$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ da er $x_h = \dfrac{\operatorname{sgn}(\ell)}{|x|}$ høyre invers

$$\boxed{\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}}$$

c) Hvis $(\mathbb{R}^*, *)$ er en gruppe så må e = identiteten være ± 1. Dersom $e = 1$ så har vi at $(-1)^{-1} * (-1) = -1 \neq 1$

Dersom $e = -1$ så har vi at $(1)^{-1} * (1) = 1 \neq -1$

Dvs $(\mathbb{R}^*, *)$ kan ikke være en gruppe.

no 32. Merk at $x * x = e$ betyr at $x^{-1} = x$.

S.56

no 26.

Gruppe	Syklisk	Generatorer/Forklaring
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle = G_1$	Ja	$\{1, -1\}$
$\langle \mathbb{Q}, + \rangle = G_2$	Nei	hvis $\frac{m}{n}$ generator for G_2, umulig å finne $t \in \mathbb{Z}$ s.a. $t \cdot \frac{m}{n} = \frac{1}{p}$, p primtall og $p \nmid n$
$\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle = G_3$	Nei	Samme argument som over.
$\langle 6\mathbb{Z}, + \rangle = G_4$	Ja	$\{6, -6\}$
$\langle 6^n, \cdot \rangle = G_5$	Ja	$\{6, 6^{-1}\}$
$\langle a + \sqrt{2}b, + \rangle$	Nei	$a + \sqrt{2}b$ generator. Hvis $b = 0$ $\Rightarrow$ umulig å uttrykke $\sqrt{2}$ som $n \cdot a$, $n, a \in \mathbb{Z}$. Hvis $b \neq 0$ umulig å uttrykke 1 som $n(a + \sqrt{2}b)$, $n \in \mathbb{Z}$.

S.58

nr 45. $H \leq G$ undergruppe $\iff ab^{-1} \in H \ \forall a,b \in H$ (H ikke-tom delmengde)

Bevis:

$\Rightarrow$: Anta H er en undergruppe av G, La $a,b \in H$. Siden H er en gruppe må $b^{-1} \in H$, og siden H er lukket mhp. $\cdot$ så får vi at $ab^{-1} \in H$. Siden $a,b \in H$ var vilkårlige ~~gjel~~ gjelder dette $\forall a,b \in H$, og vi har vist det vi skulle vise

$\Leftarrow$: Siden H ikke-tom finnes det en $x \in H$. Dette gir da at $1 = xx^{-1} \in H$ og vi har (2) i fra teorem 5.14.
Vi får nå at $x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} \in H \ \forall x \in H$, så vi har (3) i fra teorem 5.14. Nå har vi at $x,y \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$ ($a = x$, $b = y^{-1}$) som gir $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$ og vi har vist (1) i teorem 5.14, dermed er H en ~~g~~ undergruppe av G. $\square$

nr 41. Merk at $\langle g^n, n \in \mathbb{Z} \rangle = \langle (g^{-1})^n, n \in \mathbb{Z} \rangle$, altså dersom g er en generator så er g^{-1} også en generator.
Dvs enten er $g = g^{-1}$ ellers så er $g = e$

$g = g^{-1} \Rightarrow G = \langle g \rangle = \{g, g \cdot g^2 = gg = gg^{-1} = e\} = \{e, g\}$

$g = e \Rightarrow G = \langle e \rangle = \{e\}$

nr 51. Her kan vi bruke oppg. 45. Observer først at dersom
$ax = xa \iff x^{-1}a = ax^{-1}$ (altså $x \in H \iff x^{-1} \in H$)
La $x,y \in H$ ($\Rightarrow y^{-1} \in H$) se på $(xy^{-1})a$:

$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$

Dette viser at $xy^{-1} \in H$. I følge oppgave 45 får vi at H er en undergruppe.