Øving 3

S.67

no36 Teorem 6.10 gir at $G \simeq \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}$ har kun to generatorer, nemlig 1 og -1. Ergo kan ikke G ha flere enn 2 generatorer (G må ha nøyaktig to generatorer). Altså finnes ingen uendelig syklisk gruppe med 4 generatorer (forskjellige generatorer)

no50 Anta $a^2=e$ og a er det eneste elementet slik at $a^2=e$, $(a \neq e)$ (*)

Vi observerer

$$(xax^{-1})^2 = (xax^{-1})(xax^{-1}) = xax^{-1}xax^{-1} = xa^2x^{-1} = xx^{-1} = e$$

Fra (*) får vi at $(xax^{-1}) = a \iff xa = ax \quad \forall x \in G$.

no53 La $m|n$, dvs $n = m \cdot d$. Har at $\langle a \rangle = G$ og

$e = a^n = a^{d \cdot m} = (a^d)^m$, dvs a^d er en løsn av $x^m = e$.

La $b_i = (a^d)^i$ for $1 \leq i \leq m$. Da er b_i også en løsn av $x^m = e$: $(b_i)^m = (a^d)^{i \cdot m} = a^{dim} = (a^n)^i = e^i = e$.

Videre ser vi at $b_i \neq b_j$ for $i \neq j$ $1 \leq i,j \leq m$:

Anta $i<j$ og at $b_i = b_j \iff a^{di} = a^{dj} \iff a^{d(j-i)} = e$, $(d(j-i)) < n$

men a generer G og n er det minste tall s.a. $a^n = e$, dette ~~er umulig da~~ viser da at $b_i \neq b_j$.

S.84

no20 $\langle \rho \rangle \neq S_3$ da S_3 er ikke-abelsk, men det er $\langle \rho \rangle$

S.86

no44 For hvert n-gon

har vi n rotasjoner svarer til perm $\sigma = (1\,2\,3 \ldots n)$, $\sigma^2, \ldots, \sigma^n = id$ (Dette danner en undergruppe av orden n). I tillegg får vi n speilinger: − n odd får vi speiling for hvert hjørne − motstående kant. − n like $\frac{n}{2}$ speilinger for motst. kanter + $\frac{n}{2}$ speilinger for motstående hjørner.

S.86

no 46 For hver $n \geq 3$ se på $\sigma = (123)$ og $\mu = (13)$

Vi har at $\sigma\mu = (123)(13) = (23)$

og $\mu\sigma = (13)(123) = (12)$

mao. $\sigma\mu \neq \mu\sigma$ ergo kan ikke S_n være abelsk.

no 47 Vi ser at no 46 lar seg generalisere: gitt $\sigma = (a_1, a_2 \cdots a_r) \in S_n$ og $\mu = (a_1\, a_r)$ så får vi

$$\sigma\mu = (a_1\, a_2 \cdots a_r)(a_1\, a_r) = (a_2 \cdots a_r)$$

og

$$\mu\sigma = (a_1\, a_r)(a_1 \cdots a_{r-1}\, a_r) = (a_1\, a_2 \cdots a_{r-1})$$

Ved å kombinere dette med resultatet som sier at enhver permutasjon kan skrives som et ~~disjunkt~~ produkt av disjunkte sykler.