Øving 4

S. 95

no 27.

a) For hver sykel $\sigma \in S_n$, $\sigma = (a_1 \cdots a_m)$, kan vi skrive σ som et produkt av $(m-1)$-transposisjoner på følgende måte: $\sigma = (a_1, \dots, a_m) = (a_1 a_m) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$.

Videre vet vi at en hver permutasjon kan faktoriseres i produkt av disjunkte sykler, dvs $\tau \in S_n$

$$\tau = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_s \quad , \text{der } \sigma_i = (a_1, \dots, a_{r_i}) \text{ (sykler) og } s \geq 1$$

Siden alle σ_i'ene er disjunkte får vi at $r_1 + r_2 + \cdots + r_s \leq n$ (dersom denne summen overskredet n kan ikke σ_i'ene være disjunkte. Hvorfor?)

Nå ser vi at hver σ_i kan skrives som et produkt av $(r_i - 1)$ transposisjoner. Totalt får vi at τ kan skrives som et produkt av

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \cdots + (r_s - 1) = r_1 + \cdots + r_s - (\overbrace{1 + \cdots + 1}^{s})$$

$$\overset{\text{fra}}{\leq} n - s \leq n - 1 \quad \text{siden } s \geq 1$$

b) Følger av a) ved at man ser at $s \geq 2$, hvorfor?

no 29. Dersom H består kun av like permutasjoner er det ingenting å vise. Anta $\lambda \in H$ er odde permutasjon. La A_n være mengden av like permutasjoner i S_n og B_n mengden av odde permutasjoner i S_n. Da er $A_n \cap H$ mengden av like permutasjoner i H og $B_n \cap H$ mengden av odde permutasjoner i H. Vis så at

$$\varphi_\lambda : B_n \cap H \longrightarrow A_n \cap H \text{ gitt ved}$$

$\varphi_\lambda(\sigma) = \lambda\sigma$ er en bijeksjon av mengder og konklusjonen følger. (Hvorfor?)

S. 103

no 28 Anta $g^{-1}hg \in H$ for alle $h \in H$ og $g \in G$. Velg $h \in H$ og $g \in G$

vi vet at $g^{-1}hg \in H$, dvs finnes en $h' \in H$ s.a. $g^{-1}hg = h'$

$\overset{\text{multf. } g \text{ f.v.}}{\iff}$ $hg = gh' \in gH$. Dette gir at $Hg \subseteq gH$ (siden vi kan gjøre dette $\forall h \in H$ og $g \in G$). Vi vet at H har like mange elementer som Hg (og som gH), dette gir da at $Hg = gH$.

no 32 Anta $aH = bH$. Siden $e \in H$ får vi at $a \in aH = bH$.
Dette betyr at det finnes $h \in H$ s.a. $a = bh \iff \underset{(*)}{a^{-1} = h^{-1}b^{-1}}$
Velg en $h' \in H$ og se på:

$$h'a^{-1} \overset{(*)}{=} h'(h^{-1}b^{-1}) = \underbrace{(h'h^{-1})}_{\in H} b^{-1} \in Hb^{-1}$$

Altså $Ha^{-1} \subseteq Hb^{-1}$, dette gir da at $Ha^{-1} = Hb^{-1}$ (Hvorfor?).