Algtall, øving 5

Side 103:

39) Vis at hvis H er en undergruppe av indeks 2 i en endelig gruppe G, så er alle venstre restklasser av H også høyre restklasser av H.

- Lurte først på om de mente $aH = Ha$ eller $aH = Ha$, men så kom jeg på at $aH = Hā \Rightarrow a \in Hā \Rightarrow Hā$ er en høyre restklasse som inneholder $a \Rightarrow Hā = Ha$.

Jeg skal altså vise at $aH = Ha$, $bH = Hb$, der jeg antar at $a \neq b$, $a, b \in G$, slik at aH og bH er de to venstre restklassene.

$eH = H$ er en venstre restklasse. Velger $a \in G$, $a \notin H$, og får aH er den andre.

$eH = H = He$. Så da får vi med alle elementene fra eH i den ene høyre restklassen, He, og den andre høyre restklassen må være alle elementene i G som ikke er i $He = eH$, altså aH.

q. e. d.

la

40) La $g \in G$. Vi har da at $\langle g \rangle \leq G$. Siden $|G| < \infty$ kan vi bruke Lagrange, som sier at $|\langle g \rangle| \mid |G|$, dvs $|G| = n = m \cdot d$, der $|\langle g \rangle| = m$. Dette betyr at $g^m = e$, som gir at

$$e = e^d = (g^m)^d = g^{m \cdot d} = g^n$$

Siden g ~~[illegible]~~ valgt vilkårlig, gjelder dette for alle $g \in G$.

Side 111 - 113:

22) Finn alle abelske grupper av orden 16, opp til isomorfi.

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \quad = 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^2 \cdot 2^2 \quad = 4 \cdot 4$$

$$= 2^3 \cdot 2 \quad = 8 \cdot 2$$

Da får vi gruppene

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$
- $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_{16}$

Antall abelske grupper av orden p^r er antall partisjoner av r. Altså antall forskjellig måter å skrive r som en sum av tall $1 \leq k \leq r$

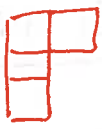
eks: $r=4$ Young diagram

$1+1+1+1$ ⟷

$2+1+1$ ⟷

$2+2$ ⟷

$3+1$ ⟷



4 ⟷

26) Hvor mange av orden 24?

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$= 2^2 \cdot 2 \cdot 3$

$= 2^3 \cdot 3$

Altså tre grupper.

Antall abelske grupper av orden $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2}$ er

(antall partisjoner av r_1) · (antall partisjoner av r_2)

$25 = 5 \cdot 5$

$= 5^2$

Altså to grupper.

$24 \cdot 25$ gir tre ulike sammensetninger for 24, og for hver av dem to for 25. Tilsammen seks. Sånn kunne jeg bare tenke fordi 24 og 25 ikke har noen primtall felles.

Ok

27) $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_u^{r_u}$, $n = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_v^{s_v}$,

$p_i \neq p_j \iff i \neq j$

$q_i \neq q_j \iff i \neq j$

p_i og p_j kan være enten like eller ulike, q_i og q_j kan være like eller ulike, men

$p_i \neq q_j$, $\forall\ 1 \leq i \leq u,\ 1 \leq j \leq v$.

Anta $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_u^{r_u}$ kan settes sammen på r forskjellige måter, $q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_v^{s_v}$ kan settes sammen på s måter.

La P^i være en av måtene å sette sammen

$P_1 P_2 \dots P_u$ på. Da kan

$P^i q_1 q_2 \dots q_v$ settes sammen på s måter,

fordi alle p-er og q-er er parvis prime.

Det vil si at vi for enhver måte å sette sammen

p-ene på har s måter å sette sammen

q-ene på, så totalt har vi $r \cdot s$ måter

å sette sammen alt. Herregud, tror aldri

jeg har ordlagt meg så kludrete før...

qed... ☺

Litt kludrete, men essensielt er du i mål

39) La G være en abelsk gruppe. Vis at elementene med endelig orden i G former en undergruppe. (Torsion subgroup)

La $H = \{ g \in G \mid |\langle g \rangle| < \infty \}$, da er

$H = \{ g \in G \mid \exists k \in \mathbb{Z} : g^k = e \}$. ($e$ er identitet.)

* La $a \in H$. Da $\exists\ k \in \mathbb{Z} : a^k = e$. Da er

$(a^{-1})^k = a^{-k} = (a^k)^{-1} = e^{-1} = e$, så $a^{-1} \in H$.

* $e^1 = e$, så $e \in H$.

* La $a_1, a_2 \in H$. Da er $a_1^{k_1} = e$, $a_2^{k_2} = e$.

Er det her jeg bruker at gruppa er abelsk? Ja!

Da er $(a_1 a_2)^{k_1 k_2} = a_1^{k_1 k_2} a_2^{k_1 k_2} = (a_1^{k_1})^{k_2} (a_2^{k_2})^{k_1} = e^{k_2} e^{k_1} = e$, $a_1 a_2 \in H$. (Kunne brukt $\operatorname{lcm}(k_1, k_2)$? I stedenfor $k_1 k_2$? Du, nei skader ikke å bruke $k_1 k_2$)

Altså er H lukket, alle elementer i H har invers i H, og identiteten er i H. Da er H en undergruppe, qed.

siden G er abelsk!

$(a_1 a_2)^m = \overbrace{a_1 a_2 a_1 a_2 \cdots a_1 a_2}^{m} \overset{!}{=} (a_1 \cdot a_1 a_2 a_2) \cdots a_1 a_2$

47) G abelsk gruppe. H delmengde av G som inneholder identiteten e og alle elementer av orden 2. Vis at H er en undergruppe av G.

- $e \in H$, ok.
- $a \in H \Rightarrow a^2 = e \Rightarrow (a^2)^{-1} = e \Rightarrow a^{-2} = e$

$\Rightarrow (a^{-1})^2 = e \Rightarrow a^{-1} \in H$, ok.

Er dette ok? Antar jeg noe ulovlig?

Hva om a^{-1} har orden < 2? Gevalt så vil $|\langle a \rangle| = |\langle a^{-1} \rangle|$ vis dette!

- $a \in H$, $b \in H \Rightarrow a^2 = e$, $b^2 = e$,

$$(ab)^2 = abab = aabb = a^2 b^2 = e \cdot e = e,$$

(ab abelsk)

$(ab) \in H$, ok.

H lukket, har identitet, har invers, ok.

A

Side 133-135:

2) Bestem om

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ under addisjon, $\varphi(x)$ = største heltall $\leq x$ er en homomorfi.

(Runder ned til nærmeste heltall.)

$\varphi(2,6)+\varphi(2,6) = 2+2 = 4 \neq 5 = \varphi(5,2) = \varphi(2,6+2,6)$,

så φ er ikke en homomorfi ✗

6) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}$ er additiv, $\mathbb{R}^*$ er multiplikativ,

$\varphi(x) = 2^x$

$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a 2^b = \varphi(a)\varphi(b)$, ja, dette er en gruppehomomorfi. ✓

8) G gruppe, $\varphi: G \to G$, $\varphi(g) = g^{-1}$ for $g \in G$.

$\varphi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1} = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$

Hvis G er abelsk, er $g_1 g_2 = g_2 g_1$ og

$\varphi(g_2)\varphi(g_1) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, så da er dette en gruppehom. - ellers ikke. ✓

17) Finn $\ker(\varphi)$ og $\varphi(25)$ for $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$.

slik at $\varphi(1) = \bar{4}$, φ homomorfi.

$x \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = \bar{0} \Rightarrow x = 7s$ for $s \in \mathbb{Z}$.

Da er $x \in 7\mathbb{Z}$, så $\ker(\varphi) = 7\mathbb{Z}$.

$$\varphi(25) = \varphi(1+1+\ldots+1) = \varphi(1)+\ldots+\varphi(1) = 25\,\varphi(1)$$

$$\equiv 4 \cdot 25 \equiv 100$$

$$\equiv 2 \pmod 7$$

44) $\varphi : G \to G'$ gruppehomomorfi. Vis at hvis $|G|$ er endelig, så er $|\varphi[G]|$ endelig og er en divisor for $|G|$.

$|\varphi[G]| \leq |G|$, så hvis $|G|$ er endelig så er $|\varphi[G]|$ endelig.

La $H = \text{Ker}\,\varphi$. Betrakter restklassene hl H i G. For $a \in G$, er $a \in aH$. Vi har altså restklassene $a_1H, a_2H, \ldots, a_nH$, tilsammen n restklasser der

$n = \frac{|G|}{|H|}$. Anta $b_i \in a_iH$. Da er $b_i = a_ih$ for en $h \in H$. Da er

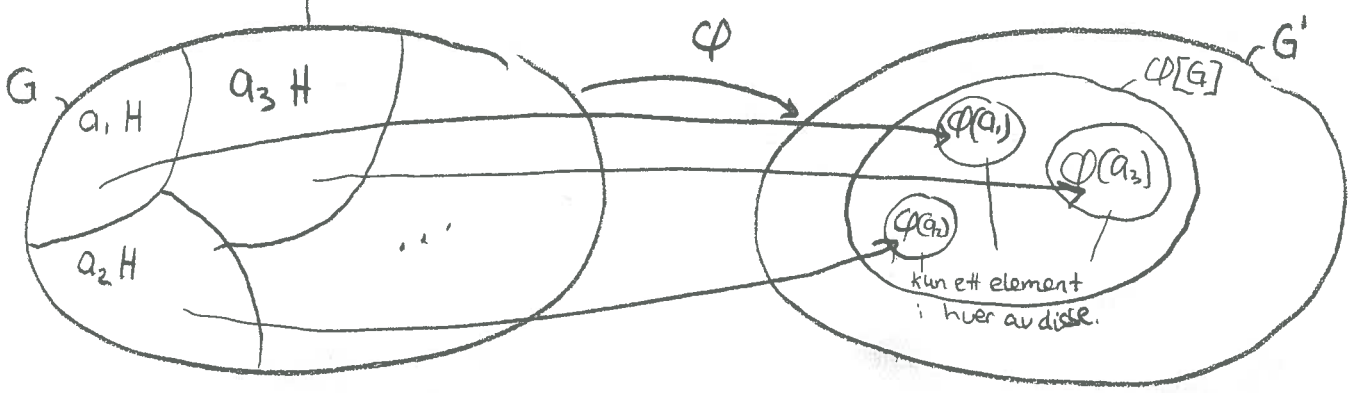
$\varphi(b_i) = \varphi(a_ih) = \varphi(a_i)\varphi(h) = \varphi(a_i)$ ettersom $h \in H = \text{Ker}\,\varphi$

Vi har altså at $\varphi(x) = \varphi(a_i)$ $\forall$ $x \in a_iH$.

Det betyr at det er nøyaktig like mange elementer i $\varphi[G]$ som det er antall restklasser for H i G. Da er

$|\varphi[G]|$ = antall restklasser for H i G = $\frac{|G|}{|\text{Ker}\,\varphi|}$

$\Rightarrow |\varphi[G]| \mid |G|$, q.e.d.



45) La $\varphi : G \to G'$ være en gruppehomomorfi. Vis at hvis $|G'|$ er endelig, så er $|\varphi[G]|$ endelig og er en divisor for $|G'|$.

$\varphi[G]$ er en undergruppe av G', så hvis $|G'|$ er endelig så er $|\varphi[G]|$ det også.

Dessuten har vi at $|\varphi[G]| \mid |G'|$ også når $\varphi[G]$ er undergruppe av G'. dt

47) Vis at en hvilken som helst gruppehomomorfi $\varphi : G \to G'$ der $|G|$ er et primtall enten må være den trivielle homomorfien eller en 1-1 map.

$|G|$ er et primtall.

$|\varphi[G]| \mid |G|$ (fra 44), men når $|G|$ er et primtall betyr det at $|\varphi[G]| = 1$ eller $|\varphi[G]| = |G|$.

$|\varphi[G]| = 1 \Rightarrow \varphi$ trivielle homomorfien

$|\varphi[G]| = |G| \Rightarrow$ 1-1 map. dt

51) La G være en gruppe og la a være et element i G. La $\varphi: \mathbb{Z} \to G$ være definert ved $\varphi(n) = a^n$. Vis at φ er en homomorfi.

Beskriv bildet og muligheter for kjerne for φ.

La $m, n \in \mathbb{Z}$. Da er

$\varphi(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = \varphi(m)\varphi(n)$, ok hom.

Bildet til φ er den sykliske undergruppen av G generert av a.

$\varphi(x) = e' = a^m \Rightarrow m = 0$ eller $m = k \cdot |\varphi[G]|$, $k \in \mathbb{Z}$

Enten kan $\ker\varphi = \{0\}$, eller $\ker\varphi = \{k \cdot |\varphi[G]| \mid k \in \mathbb{Z}$

Sistnevnte hvis $\varphi[G]$ er endelig.

dc

Tilleggsoppgave:

La G være en abelsk gruppe. La

$H_n = \{e\} \cup \{b \in G \mid b^n = e\}$ for en fiksert n slik at $2 \leq n \in \mathbb{Z}$. Vis at H_n er en undergruppe av G.

Lukket:

$b_1^n = e,\ b_2^n = e \Rightarrow (b_1 b_2)^n = b_1^n b_2^n = e \cdot e = e$, ok.

Identitet:

Ja. (Og den er også lukket for eb og ee.)

Invers:

$b^n = e \Rightarrow (b^n)^{-1} = e \Rightarrow (b^{-1})^n = e$, så $b \in H_n \Rightarrow b^{-1} \in H_n$, ok

Eller, hvis man skulle bruke hintet:

Definér $\varphi : G \longrightarrow G$ ved $\varphi(k) = k^n \ \forall \ k \in G$.

φ er en gruppehomomorfi: $k_1, k_2 \in G \Rightarrow$

$\varphi(k_1 k_2) = (k_1 k_2)^n = k_1^n k_2^n = \varphi(k_1)\varphi(k_2)$.

$\operatorname{Ker}\varphi = H_n = \varphi^{-1}[\{e\}]$. $\{e\}$ er en undergruppe av G, så Teorem 13.12-4) $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = H_n$ er en undergruppe av G, q.e.d.